UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA

Profesor: Pedro Montero
Ayudante: Sebastián Fuentes

Ayudantía 7 Topología

Grupo Fundamental y Homología Simplicial

6 de mayo de 2024

Problema 1. Usando la correspondencia de Galois, encuentre todos los revestimientos conexos del espacio $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Demostración. Los resultados vistos en clases nos permiten afirmar que hay una correspondencia biyectiva entre (clases de isomorfismo de) los revestimientos conexos de un espacio X (satisfaciendo las propiedades de regularidad usuales) preservando un punto base x_0 y los subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$. Usando los visto en la Ayudantía 6 tenemos que

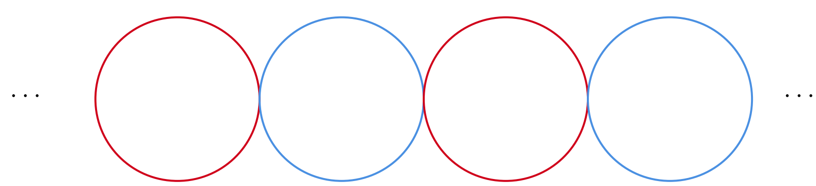
$$\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = \pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) * \pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = \langle a, b | a^2 = b^2 = 1\rangle$$

i.e., el grupo fundamental de X corresponde al grupo libre de dos generadores a, b junto con las relaciones $a^2 = b^2 = 1$. Buscamos entonces los subgrupos de este grupo. Listamos estos subgrupos a continuación:

1. El subgrupo trivial, el cual se corresponde con el revestimiento universal de X. Este espacio se construye de la siguiente forma: considerar $\widetilde{X}$ como el espacio topológico obtenido como la unión de una esfera de centro $(k, 0, 0)$ y radio $1/2$ en $\mathbb{R}^3$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, i.e.,

$$\widetilde{X} := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - k)^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}\}$$

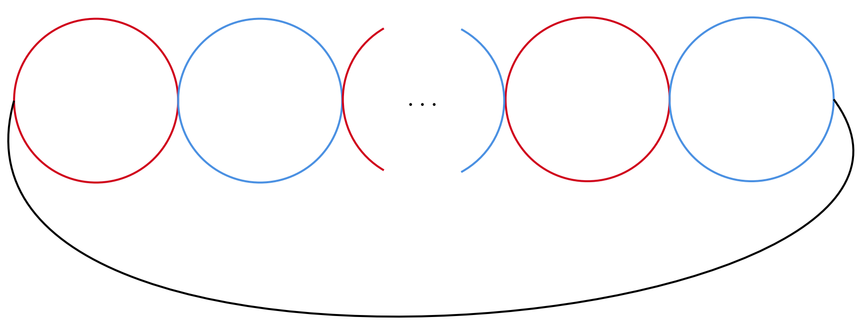
   y de tal forma que cada esfera vaya cubriendo uno de los espacios $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ de manera intercalada. El hecho que este espacio es simplemente conexo requiere una aplicación de una forma más general del Teorema de Seifert-van Kampen[1].



2. Subgrupos de la forma $\langle (ab)^k \rangle \cong \mathbb{Z}$ para cada $k \in \mathbb{Z}$. Notar que en este caso el revestimiento correspondiente será de grado $2k$ puesto que tenemos una biyección

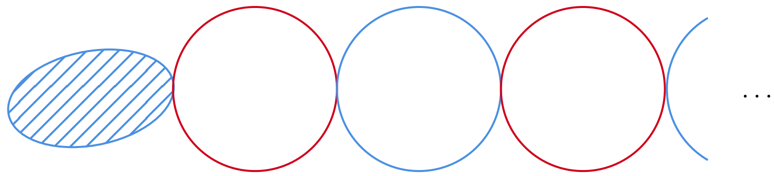
$$p^{-1}(x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_0)/\pi_1(p)(\pi_1(\widetilde{X}, y_0)) \cong \langle a, b | a^2 = b^2 = 1\rangle / \langle (ab)^k \rangle$$

   y este último grupo es de orden $2k$.

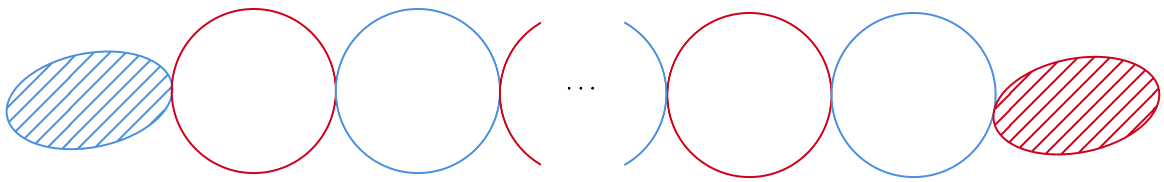


[1] ver Teorema 1.20 de *Algebraic Topology* de Allen Hatcher.

3. Subgrupos no triviales tales que no contienen un elemento de la forma $(ab)^k$. En este caso el grupo es generado por una palabra impar, la cual es entonces de la forma $(ab)^k a$ o bien $b(ab)^k$. Vemos que estos subgrupos son $\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, por lo que el revestimiento debe ser de grado 2. Notamos que podemos construir este espacio realizando el bouquet de un plano proyectivo con una semirecta infinita de esferas, como se ilustra en la siguiente figura.



4. Subgrupos isomorfos a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, generados por elementos $(ab)^n$ y $(ab)^m a$, el cual corresponde a una cadena finita de esferas S^2 terminada en ambos extremos en $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.



   Notar que las copias de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ que aparecen al final pueden ser de un color diferente o igual, sin embargo, todos estos espacios provienen de grupos conjugados

Observación: En todos los dibujos los colores representan el hecho que cada esfera o plano proyectivo cubre uno de los planos de X.

□

Problema 2. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^3$ la unión de n líneas a traves del origen. Calcule $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus X)$.

Demostración. Recordemos que la función

$$H : (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times I \to \mathbb{S}^2, \quad (x,t) \mapsto x(1-t) + t\frac{x}{\|x\|}$$

es un retracto de deformación de $\mathbb{R}^3\{0\}$ en la esfera $\mathbb{S}^2$. Este retracto es un movimiento radial, por tanto notamos que su restricción a $\mathbb{R}^3 \setminus X$ da una equivalencia homotópica $\mathbb{R}^3 \setminus X \simeq \mathbb{S}^2 \setminus A$ donde A es un conjunto finito de $|A| = 2n$ elementos. A su vez, tenemos que $\mathbb{S}^2 \setminus A \simeq \mathbb{R}^2\{p_1, \dots, p_{2n-1}\}$, i.e., el resultado es un plano menos $2n-1$ puntos. Notamos entonces que este espacio es homotópicamente equivalente al bouquet de $2n-1$ círculos $\mathbb{S}^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^1$, así que

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus X) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{2n-1 \text{ veces}}$$

□

Problema 3. Demuestre que el grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2)$ es no numerable.

Demostración. Probemos en primer lugar que $X = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ es conexo por caminos. Para ello escogemos dos puntos $(a,b), (c,d) \in X$. Por tanto, a o bien b es irracional y lo mismo aplica para (c,d). Si a, d son ambos irracionales podemos considerar los caminos en línea recta $(a,d) \to (a,d) \to (c,d)$, los cuales están de hecho contenidos en X. Si c es irracional en vez de d, basta tomar los caminos en línea recta $(a,b) \to (c,b) \to (c,d)$ para conectar los puntos. Los otros casos son análogos, así que X es conexo por caminos.

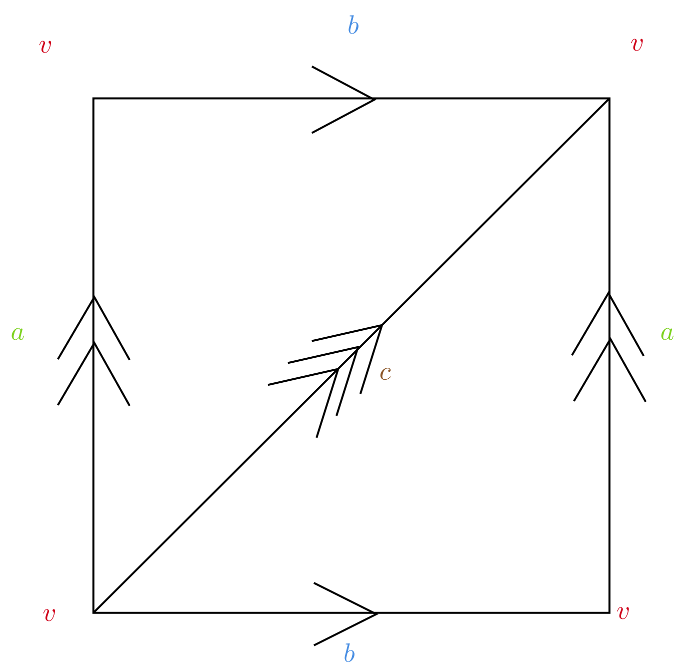
Por lo anterior podemos calcular su grupo fundamental en torno a cualquier punto del espacio. Dado $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irracional, consideremos el cuadrado

$$A_\alpha = \{(x, \sqrt{2}), -\alpha \leq x \leq \alpha\} \cup \{(x, -\sqrt{2}), -\alpha \leq x \leq \alpha\} \cup \{(\alpha, y) : -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}\} \cup \{(-\alpha, y) : -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}\}$$

el cual está claramente contenido en X. Podemos fijar un punto en dicho cuadrado y considerar el lazo consistente de recorrer el cuadrado. Fijemos el punto $(0, \sqrt{2}) \in A_\alpha$ y denotemos por γ_α al lazo basado en $(0, \sqrt{2})$ que recorre $A - \alpha$ en sentido horario. Consideremos ahora $\beta > \alpha$, el cuadrado A_β y el lazo γ_β definidos de manera análoga (basado en el mismo punto). Consideramos el lazo $\gamma_\alpha \gamma_\beta^{-1}$ basado en $(0, \sqrt{2})$, el cual recorre el rectángulo más grande en una dirección, y luego el más pequeño en dirección contraria. Por densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ podemos considerar $q \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha < q < \beta$, así que tenemos una inclusión $i : \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, q)\}$, la cual induce un morfismo de grupos $\pi_1(i) : \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2) \to \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, q)\})$.
Notemos ahora que hay una homotopía $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, q)\} \simeq \mathbb{S}^1$, dada por un retracto de deformación en $\mathbb{S}^1$. Bajo este retracto el lazo $\pi_1(i)(\gamma_\alpha \gamma_\beta^{-1})$ corresponde a un lazo no trivial en $\mathbb{S}^1$, y dado que $\pi_1(i)$ es un morfismo tenemos que $\gamma_\alpha \neq \gamma_\beta$ en $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2)$. Vemos que $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2)$ es no numerable pues tenemos $\mathbb{Q} \hookrightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2), \alpha \to \gamma_\alpha$ inyectiva. $\square$

Problema 4. Considere el 2-toro $\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Calcule sus grupos de homología simplicial.

Demostración. El toro posee la siguiente Δ-estructura:



Notamos entonces que esta Δ-estructura está compuesta por los siguientes elementos:

1. un 0-símplice denotado v, correspondiente a los cuatro vértices del cuadrado los cuáles se encuentran identificados.
2. tres 1-símplices denotados a, b, c, corespondiendo a cada par de lados paralelos del cuadrado (identificados) y a la diagonal del cuadrado respectivamente.
3. dos 2-simplices que denotaremos T, S, los cuales son pegados a lo largo de la diagonal.

Dado que $\Delta_i(T) = 0$ para $i > 2$, el complejo simplicial asociado a $\mathbb{T}^2$ corresponde a:

$$0 \xrightarrow{\partial_3} \Delta_2(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{\partial_2} \Delta_1(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

donde $\Delta_0(\mathbb{T}^2) = \langle v \rangle$,$\Delta_1(\mathbb{T}^2) = \langle a, b, c \rangle$,$\langle T, S \rangle$. Calculamos ahora los mapeos de borde. Para ello notamos en primer lugar que $\partial_0 = 0, \partial_3 = 0$, y además

$$\partial_1 : \Delta_1(\mathbb{T}^2) \to \Delta_0(\mathbb{T}^2), \quad a \mapsto (v - v) = 0, \quad b \mapsto (v - v) = 0, \quad c \mapsto (v - v) = 0$$

Similarmente calculamos

$$\partial_2 : \Delta_2(\mathbb{T}^2) \to \Delta_1(\mathbb{T}^2), \quad T \mapsto a + b - c, \quad S \mapsto a + b - c$$

Podemos entonces directamente obtener los grupos de homología simplicial:

$$\begin{aligned} H_0^\Delta(\mathbb{T}^2) &= \ker(\partial_0)/\operatorname{Im}(\partial_1) = \Delta_0(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z} \\ H_1^\Delta(\mathbb{T}^2) &= \ker(\partial_1)/\operatorname{Im}(\partial_2) = (\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c)/\langle a + b - c \rangle \cong \mathbb{Z}^2 \\ H_2^\Delta(\mathbb{T}^2) &= \ker(\partial_2)/\operatorname{Im}(\partial_3) = \mathbb{Z}(T - S) \cong \mathbb{Z} \end{aligned}$$

donde el último grupo se obtiene notando que $\ker(\partial_2) = \mathbb{Z}(T - S)$. Así, obtenemos que

$$H_n^\Delta(T) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{for } n = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{for } n = 0, 2 \\ 0 & \text{for } n \geq 3 \end{cases}$$

$\square$