Pauta Ayudantía 5 Topología

Revestimientos topológicos II

15 de abril de 2024

Problema 1. Sea $p : \widetilde{X} \to X$ un revestimiento del espacio X tal que $p^{-1}(x)$ es finito para todo $x \in X$. Demuestre que $\widetilde{X}$ es compacto (quasi-compacto y Hausdorff) si y solo si X es compacto.

Demostración.
($\Rightarrow$) Supongamos en primer lugar que $\widetilde{X}$ es compacto. Como $X = p(\widetilde{X})$ tenemos que X es quasi-compacto y por tanto solo debemos probar que es Hausdorff. Sean $x, y \in X$ distintos y tomemos sus fibras $p^{-1}(x) = \{\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n\}, p^{-1}(y) = \{\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_n\}$ donde n es el grado del revestimiento. Como $\widetilde{X}$ es Hausdorff podemos considerar vecindades $\widetilde{x}_1 \in \widetilde{U}_1, \ldots, \widetilde{x}_n \in \widetilde{U}_n, \widetilde{y}_1 \in \widetilde{V}_1, \ldots, \widetilde{y}_n \in \widetilde{V}_n$ tal que sean disjuntas a pares, i.e.,

$$\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j = \emptyset, \widetilde{U}_i \cap \widetilde{V}_j = \emptyset, \widetilde{V}_i \cap \widetilde{V}_j = \emptyset \quad \text{para todos} \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Reduciendo estas vecindades si fuese necesario, podemos asumir que $p|_{\widetilde{U}_i} \widetilde{U}_i \to U :, p|_{\widetilde{V}_i} \to \widetilde{V}_i \to V$ son homeomorfismos para todo $i = 1, \ldots, n$, donde U, V son ciertas vecindades regularmente cubiertas de x, y respectivamente. Resta entonces ver que U, V son disjuntas, para lo cual basta notar que si $z \in U \cap V$ entonces z posee en total $2n$ preimágenes por p (una por cada abierto considerado), lo cual es una contradicción con el hecho que el grado del revestimiento es n.
($\Leftarrow$) Sea X compacto. Veamos primero que $\widetilde{X}$ es Hausdorff. Para ello sean $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{X}$ y $x = p(\widetilde{x}), y = p(\widetilde{y})$. Si $x = y$ considerando un abierto U regularmente cubierto de este punto, como $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ son diferentes estarán en diferentes hojas cubriendo a U y estos abiertos separarán dichos puntos. Supongamos entonces que $x \neq y$, en cuyo caso consideramos vecindades abiertas disjuntas U_x, U_y de cada punto, las cuales podemos asumir regularmente cubiertas (intersectando con abiertas con dicha propiedad). Tenemos entonces que $p^{-1}(U_x), p^{-1}(U_y)$ son vecindades abiertas disjuntas de $\widetilde{x}, \widetilde{y}$.
Probemos ahora que $\widetilde{X}$ es quasi-compacto. Para $x \in X$ considere $U_x \subseteq X$ abierta regularmente cubierto de dicho punto. Como X es compacto entonces es regular y podemos tomar $x \in V_x$ abierto tal que $V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x$, el cual por ende también es regularmente cubierto por p. Como X es compacto, el cubrimiento $\{V_x\}_{x \in X}$ contiene un subrecubrimiento finito $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$ y cada $p^{-1}(\overline{V_{x_n}})$ es compacto por ser unión finita de quasi-compactos. Tenemos que

$$\widetilde{X} \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} p^{-1}\left(\overline{V_{x_i}}\right) \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} p^{-1}\left(V_{x_i}\right) = p^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}\right) = p^{-1}(X) = \tilde{X}$$

así que $\widetilde{X}$ es una unión finita de quasi-compactos y en consecuencia es quasi-compacto.

□

Definición (espacio semilocalmente simplemente conexo)**.** *Sea X espacio topológico. Decimos que X es semilocalmente simplemente conexo si todo punto $x \in X$ posee una vecindad U tal que todo lazo en U es contractible en X.*

Observación 1. Notar que la definición anterior es equivalente a afirmar que para cada $x \in X$ existe una vecindad $x \in U \subseteq X$ tal que el morfismo inducido por la inclusión $i_* : \pi_1(U) \to \pi_1(X)$ es trivial

Problema 2. El objetivo de este problema es estudiar un ejemplo de espacio que no es semilocalmente simplemente conexo, así como también un ejemplo de espacio semilocalmente simplemente conexo el cual no es simplemente conexo. Considere el espacio:

$$\mathbb{H} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{n^2} \right\}$$

i.e., la unión de los círculos en $\mathbb{R}^2$ con centro en $(1/n, 0)$ y radio $1/n$. Este espacio es conocido como el *Aro Hawaiano*.

1. Muestre que $\mathbb{H}$ no es semilocalmente simplemente conexo.
2. Demuestre que el cono $C\mathbb{H}$ es simplemente conexo pero no es localmente simplemente conexo.

Demostración.

1. Denotemos por $C_n := \mathbb{B}((1/n, 0), 1/n)$ a la bola de centro $(1/n, 0)$ y radio $1/n$ en $\mathbb{R}^2$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $x_0 = (0,0)$ y veamos que $\mathbb{H}$ no es semilocalmente simplemente conexo en torno a este punto. Para ello consideramos $x_0 \in U \subseteq \mathbb{H}$ una vecindad y notemos que existe un $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $C_N \subseteq \mathbb{H}$. Definimos el mapeo $\varphi : \mathbb{H} \to C_N$ como el mapeo dado por la identidad en C_N, y tal que todos los otros puntos los mapea a x_0. Tenemos entonces la siguiente composición
$$C_N \hookrightarrow U \hookrightarrow C \xrightarrow{\varphi} C_N$$
donde las primeras dos flechas son las inclusiones, y por tanto la composición corresponde a la identidad. Por functorialidad tenemos entonces morfismos inducidos
$$\mathbb{Z} \cong \pi_1\left(C_N, x_0\right) \to \pi_1(U, x_0) \to \pi_1(C, x_0) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1\left(C_N, x_0\right) \cong \mathbb{Z}$$
cuya composición es la identidad, y por lo tanto el mapeo $\pi_1(U, x_0) \to \pi_1(C, x_0)$ es no nulo.
2. Probamos en la Ayudantía 3 que el cono sobre cualquier espacio es contractible, y por tanto es simplemente conexo. Sin embargo, el cono $C\mathbb{H}$ no es localmente simplemente conexo, pues en torno al punto $((0,0),0)$ una vecindad suficientemente pequeña contiene lazos no triviales. En efecto, el cono menos el vértice superior se retracta por deformación en su base, en particular una vecindad del punto en cuestión se retracta en su base y luego no es simplemente conexa, dado que vecindad del $(0,0)$ en $\mathbb{H}$ posee una cantidad infinita de círculos que son lazos no triviales.

□

Problema 3. Muestre que todo morfismo de grupos $\pi_1(\mathbb{S}^1) \to \pi_1(\mathbb{S}^1)$ es inducido por un mapeo $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$.

Demostración. Sabemos que $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ y todos los morfismos de grupos $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ son de la forma $n \mapsto kn$ para cierto $k \in \mathbb{N}$. Consideremos el lazo $\gamma : I \to \mathbb{S}^1, t \mapsto e^{2\pi it}$ el cual es un generador de $\pi_1(\mathbb{S}^1)$. Por la observación anterior entonces si $\Phi : \pi_1(\mathbb{S}^1) \to \pi_1(\mathbb{S}^1)$ es un morfismo de grupos existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $F([\gamma]) = [\gamma]^k$. Consideremos entonces el mapeo $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, x \mapsto x^k$ y veamos que $\Phi = \varphi_*$. En efecto, dado $[\gamma]^m \in \pi_1(\mathbb{S}^1)$ notamos que

$$\Phi([\gamma]^m) = (\Phi([\gamma]))^m = ([\gamma]^k)^m = [\gamma]^{km}, \quad \varphi_*([\gamma]^m) = \varphi_*([e^{2\pi imt}]) = [e^{2\pi ikmt}] = [\gamma]^{km}$$

□

Problema 4. Demuestre que en las siguientes situaciones no existen retractos $r : X \hookrightarrow A$.

1. $X = \mathbb{R}^3$ y A un subespacio tal que $A \cong \mathbb{S}^1$.
2. $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$ con A el borde $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.
3. X es la banda de Möebius y A su borde.

Demostración. Un retracto de deformación satisface $r \circ i = \mathrm{id}$ donde $i : A \hookrightarrow X$ es la inclusión. Por functorialidad a nivel de grupos tenemos $r_* \circ i_* = \mathrm{id}$, y por tanto r_* siempre será sobreyectivo y i_* inyectivo.

1. En este caso $\pi_1(A) = \mathbb{Z}$ y $\pi_1(X) = 0$, por lo que i_* no puede ser inyectiva.
2. Aquí $\pi_1(A) = \mathbb{Z}^2$ y $\pi_1(X) = \mathbb{Z}$ y en este caso tampoco se puede tener que i_* sea inyectiva. Si $i_*(1, 0) = m \neq 0, i_*(0, 1) = n \neq 0$ entonces $i_*(n, -m) = 0$.
3. Ahora tenemos $\pi_1(A) = \mathbb{Z}$, y en la Ayudantía 2 probamos que la banda es homotópica al círculo, así que $\pi_1(X) = \mathbb{Z}$. Sin embargo, notar que el círculo del borde de X da dos vueltas a la banda, y por tanto el morfismo i_* viene dado por $i_*(n) = 2n$. Así, vemos que no existe retracción pues no existe ningún morfismo $j : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $j \circ i_* = \mathrm{id}$.

□