Profesor: Pedro Montero
Ayudante: Sebastián Fuentes

Pauta Ayudantía 4 Topología

Revestimientos topológicos I

8 de abril de 2024

Problema 1. El objetivo de este problema es demostrar el Lema de Levantamiento de Homotopía, el cual se presenta a continuación.

Lema. *Sea $p : \widetilde{X} \to X$ un espacio de revestimiento del espacio topológico X. Considere mapeos $f_0, f_1 : Y \to X$ y una homotopía $H : Y \times I \to X$ desde f_0 a f_1 y sea $\widetilde{f_0} : Y \to \widetilde{X}$ un levantamiento de f_0 al revestimiento $\widetilde{X}$. Demuestre que existe una única homotopía $\widetilde{H} : Y \times I \to \widetilde{X}$ tal que*

1. $\widetilde{H}(-, 0) = \widetilde{f}_0(-)$
2. $p \circ \widetilde{H} = H$

Para ello, siga los siguientes pasos (considerando la misma notación y objetos del Lema):

1. Considere $y \in Y$ fijo. Argumente la existencia de una vecindad abierta $y \in V$ y una partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ del intervalo I tal que $H(V \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$ para todo $i \in I$, donde $U_i \subseteq X$ es un abierto cubierto regularmente por p.
2. Siguiendo la notación del punto anterior, utilice inducción para construir un levantamiento de la homotopía restringida $H|_{V \times I}$.
3. Concluya la demostración del Lema pegando los levantamientos construidos en los puntos anteriores. (**Hint:** Utilice la propiedad de unicidad de levantamientos vista en clases.)

Demostración. Fijemos en primer lugar $y \in Y$. Dado que H es una función continua para cada $(y, t) \in \{y\} \times I$ podemos encontrar una vecindad $V_t \subseteq Y$ de y y una vecindad $(a_t, b_t) \subseteq I$ del tiempo t de tal forma que $H(V_t \times (a_t b_t)) \subseteq U$ con $U \subseteq X$ abierto regularmente cubierto. Dado que $\{y\} \times I$ es compacto podemos tomar finitos productos de la forma anterior de tal forma que cubra $\{y\} \times I$. Esto es lo mismo que tomar abiertos $V_1, \ldots, V_n$ de y y una partición $0 = t_0 < t_1 \cdots < t_n = 1$ de I de tal forma que

$$H(V_i \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i \quad \forall i = 0, \ldots, n-1$$

donde los U_i son abiertos regularmente cubiertos. Definiendo

$$V := \bigcap_{i=0}^{n-1} V_i$$

tenemos la propiedad del paso 1.
Levantaremos $H|_{V \times I}$ utilizando inducción en los intervalos definidos anteriormente. Considerar en primer lugar $n = 0$. Por hipótesis ya tenemos un levantamiento $\widetilde{f}_0$ de $f_0(\cdot) = H(\cdot, 0)$, i.e., verifica que $p \circ \widetilde{f}_0 = f_0$. De esta forma $\mathrm{Im}(\widetilde{f}_0|_V) \subseteq p^{-1}(U_0)$ y dado que U_0 es regularmente cubierto y $\widetilde{f}_0$ es continua, reduciendo V si fuese necesario podemos suponer que $\mathrm{Im}(\widetilde{f}_0|_V) \subseteq \widetilde{U_0}$ donde $\widetilde{U_0} \cong U_0$ es una hoja cubriendo a U_0. Con esto podemos definir directamente

$$\widetilde{H}|_{V \times [0,t_1]} := (p|_{\widetilde{U_0}})^{-1} \circ H|_{V \times [0,t_1]} : V \times [0, t_1] \to \widetilde{U_0} \subseteq \widetilde{X}$$

el cual es un levantamiento de H en $V \times [0, t_1]$ por definición.
Por inducción entonces podemos suponer que ya hemos construido $\widetilde{H}$ en $V \times [0, t_i]$ y extenderemos esta construcción a $V \times [t_i, t_{i+1}]$. Como U_i está regularmente cubierto podemos considerar la hoja $\widetilde{U_i}$ de U_i en $\widetilde{X}$ tal que $\widetilde{H}(y, t_i) \in \widetilde{U}_i$

y reduciendo V de ser necesario podemos suponer que $\widetilde{H}(V \times \{t_i\}) \subseteq \widetilde{U_i}$.
Igual que antes definimos

$$\widetilde{H}|_{V\times[t_i,t_{i+1}]} := (p|_{\widetilde{U_i}})^{-1} \circ H|_{V\times[t_i,t_{i+1}]}$$

Por inducción entonces obtenemos un levantamiento $\widetilde{H}$ de H en el abierto $V \times I$.
Concluyamos ahora la demostración del Lema. Podemos aplicar la construcción anterior a cada $y \in Y$ y obtener levantamientos locales en una vecindad tubular de cada punto de Y. Por el Lema de Pegado, dado que todas estas funciones son continuas lo único que se debe verificar es que estos levantamientos coinciden en las intersecciones. Sean entonces $y_1, y_2 \in Y$ y consideremos V_1, V_2 vecindades de cada uno de estos puntos de tal forma que hay levantamientos de H en $V_1 \times I$ y $V_2 \times I$. Veamos que coinciden en

$$(V_1 \times I) \cap (V_2 \times I) = (V_1 \cap V_2) \times I$$

En efecto, como las funciones consideradas son ambas levantamientos de H estas coinciden en $\widetilde{f}_0|_{V_1\cap V_2}$ y por la propiedad de unicidad de levantamientos tenemos que estos coinciden en un subconjunto de $(V_1 \cap V_2) \times I$ el cual es abierto y cerrado. Así, dado $y \in (V_1 \cap V_2)$ tenemos un conjunto abierto y cerrado de $\{y\}\times I$ donde estos levantamientos coinciden, y dado que coinciden en $\{y\} \times \{0\}$ entonces coinciden en todo $\{y\} \times I$ (pues es conexo). Concluimos entonces que estos levantamientos coinciden en todo $(V_1 \cap V_2) \times I$ y por tanto obtenemos un levantamiento $\widetilde{H}$ de H. Vemos también que $\widetilde{H}$ es único por construcción pues su restricción a cada $\{y\} \times I$ es único. □

Problema 2.

1. Sea $p : \widetilde{X} \to X$ un revestimiento del espacio X y $A \subseteq X$ un subespacio. Muestre que $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \to A$ es un revestimiento de A.
2. Sea $p' : \widetilde{X'} \to X'$ un revestimiento del espacio X'. Muestre que la aplicación producto $p\times p' : \widetilde{X}\times\widetilde{X'} \to X\times X'$ es un revestimiento.
3. Considere ahora un mapeo $f : Y \to X$ y el subespacio topológico[1]

$$\widetilde{X} \times_X Y := \{(x, y) \in \widetilde{X} \times Y : p(x) = f(y)\}$$

   Muestre que la aplicación

$$p' : \widetilde{X} \times_X Y \to Y, \quad (x, y) \mapsto y$$

   es un revestimiento de Y.

Demostración.

1. Sea $a \in A$ y consideremos $a \in U \subseteq X$ una vecindad abierta de a en X. Dado que p es un revestimiento podemos escribir $p^{-1}(U) = \coprod_{i\in I} U_i$ donde los U_i son abiertos disjuntos de $\widetilde{X}$ y además las restricciones $p|_{U_i} : U_i \xrightarrow{\sim} U$ son homeomorfismos. Vemos entonces que $U' := U \cap A$ es una vecindad abierta de a en A la cual está bien cubierta pues, si denotamos $p' := p|_{p^{-1}(A)} \to A$ entonces

$$p'^{-1}(U') = p^{-1}(U) \cap p^{-1}(A) = \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) \cap p^{-1}(A) = \bigcup_{i\in I} \left(U_i \cap p^{-1}(A)\right)$$

   y además es claro que $p|_{U_i\cap p^{-1}(A)} : U_i \cap p^{-1}(A) \xrightarrow{\sim} U \cap A$ es un homeomorfismo.

2. Sea $(x, x') \in X \times X'$ y consideremos abiertos $x \in U \subseteq X, x' \in U' \subseteq X'$ los cuales están bien cubiertos por p, p' respectivamente. Podemos escribir entonces

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{i\in I} U_i, (p')^{-1}(U') = \bigcup_{i'\in I'} U_i$$

[1] El espacio definido a continuación se conoce como el pullback del revestimiento $p : \widetilde{X} \to X$ por f o también como el producto fibrado sobre f.

donde para cada $i \in I, i' \in I'$ los U_i, U_i' son abiertos tales que $U \cong U_i \cong U_i'$ son homeomorfos. En este caso se tendrá que $U \times U'$ está bien cubierto por $p \times p'$. En efecto, tenemos

$$(p \times p')^{-1}(U \times U') = p^{-1}(U) \times p'^{-1}(U') = \left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) \times \left(\bigcup_{i' \in I'} U'_{i'}\right) = \bigcup_{(i,i') \in I \times I'} (U_i \times U'_{i'})$$

y claramente $U_i \times U'_{i'} \cong U \times U'$ para todos $(i, i') \in I \times I'$.

3. Notar en primer lugar que por definición se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \times_X Y \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "pr_1"'] & Y \arrow[d, "f"] \\
\widetilde{X} \arrow[r, "p"] & X
\end{tikzcd}$$

Sea entonces $y \in Y$ y consideremos $f(y) \in U \subseteq X$ una vecindad de $f(y)$ regularmente cubierta por p, i.e., $p^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} V_i$ es una union disjunta de abiertos $V_i \subseteq \widetilde{X}$ y p se restringe a un homeomorfismo en cada V_i. Veamos entonces que el abierto $f^{-1}(U)$, el cual contiene a y, está regularmente cubierto por p'. En primer lugar,

$$(p')^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ p')^{-1}(U) = (p \circ pr_1)^{-1}(U) = (pr_1)^{-1}(p^{-1}(U)) = \coprod_{i \in I} (pr_1)^{-1}(V_i)$$

así que la preimagen de $f^{-1}(U)$ por p' es la unión disjunta de los abiertos $(pr_1)^{-1}(V_i)$. Resta entonces ver que

$$p'|_{(pr_1)^{-1}(V_i)} : (pr_1)^{-1}(V_i) \xrightarrow{\sim} f^{-1}(U)$$

es un homeoorfismo para cada $i \in I$. Para ello simplemente basta notar que

$$\begin{aligned}
(pr_1)^{-1}(V_i) &= \{(x, y) \in \widetilde{X} \times_X Y : x \in V_i\} \\
&= \{(x, y) \in \widetilde{X} \times Y : x \in V_i, x = p|_{V_i}^{-1}(f(y))\}
\end{aligned}$$

i.e., la primera coordenada queda completamente determinada por la segunda, y por tanto $p'|_{(pr_1)^{-1}(V_i)}$ es un homeomorfismo.

□

Problema 3. El objetivo de este problema es probar algunas propiedades topológicas de los espacios de revestimiento. Sea X espacio topológico y sea $p : \widetilde{X} \to X$ un revestimiento de X.

1. Pruebe que si $\widetilde{X}$ es compacto y X Hausdorff, entonces para todo $x \in X$ la fibra $p^{-1}(x)$ es finita.
2. Pruebe que p es un mapeo abierto.

A continuación suponga que X es localmente conexo.

3. Muestre que $\widetilde{X}$ es localmente conexo.
4. Suponga que $\widetilde{X}$ es conexo. Demuestre que si p posee una sección, i.e., existe un mapeo $s : X \to \widetilde{X}$ tal que $p \circ s = \mathrm{id}_X$ entonces p es un homeomorfismo.

Demostración.

1. Dado que X es Hausdorff, en particular los singleton son cerrados (esto es lo único que se necesita). Así, la fibra $p^{-1}(x)$ es un cerrado en $\widetilde{X}$ y por tanto es compacta. Veamos que $p^{-1}(x)$ es discreto. En efecto, x posee una vecindad abierta $U \subseteq X$ regularmente cubierta, i.e., $p^{-1}(U) = \coprod_i U_i$. Así, cada $y \in p^{-1}(x)$ ese encuentra en un único U_i, y luego $\{y\} = U_i \cap p^{-1}(x)$, deduciendo que $\{y\}$ es abierto en $p^{-1}(x)$. Vemos así que $p^{-1}(x)$ es finito pues es compacto y discreto.

2. Sea $U \subseteq \widetilde{X}$ abierto. Dado $x \in p(U)$ podemos elegir $x \in V \subseteq X$ abierto regularmente cubierto y $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una partición de V en abiertos disjuntos homeomorfos a V. Podemos entonces tomar un punto $y \in U$ tal que $p(y) = x$ y considerar $\beta \in \Lambda$ tal que $y \in V_\beta$. Tenemos que $U \cap V_\beta$ es abierto en $\widetilde{X}$ y por tanto abierto en V_β. Ahora, como $p|_{V_\beta}$ es un homeomorfismo tenemos que $p(V_\beta \cap U)$ es un abierto contenido en $p(U)$ y que contiene a x, i.e., $p(U)$ es abierto.

3. Considerar $x \in \widetilde{X}$ y una vecindad abierta $U \subseteq \widetilde{X}$ de x. Queremos encontrar entonces un abierto conexo C de $\widetilde{X}$ tal que $x \in C \subseteq U$. Para ello notamos primero que podemos elegir un abierto $p(x) \in V \subseteq X$ regularmente cubierto y un abierto $x \in U_\alpha \subseteq \widetilde{X}$ tal que $p|_{U_\alpha} : U_\alpha \xrightarrow{\sim} V$ es un homeomorfismo.
Tenemos así que $U' := U \cap U_\alpha \cong p(U \cap U_\alpha)$ son homeomorfos mediante $p|_{U_\alpha}$ y $p(U')$ es un abierto de $p(x)$. Como X es localmente conexo podemos considerar $p(x) \in C' \subseteq p(U')$ abierto conexo. Obtenemos así que $x \in p|_{U'}^{-1}(C') \subseteq U \cap U_\alpha \subseteq U$ es una vecindad conexa de x contenida en U.

4. Supongamos que existe una sección $s : X \to \widetilde{X}$ y mostremos que su imagen $s(X)$ es abierta y cerrada. Sea $\widetilde{x} \in X$ y $x = p(\widetilde{x})$. Consideremos una vecindad U de x regularmente cubierta y V la hoja sobre U que contiene $\widetilde{x}$. Dado que X es localmente conexo, podemos suponer de hecho que U es conexo. Si $\widetilde{x} \in f(X)$ tenemos que $V \subseteq f(X)$. En efecto, si consideramos la inclusión $i : U \hookrightarrow X$ notamos que $s|_U, p|_U^{-1}$ son lifts de i los cuales coinciden en $\widetilde{x}$, y por la propiedad de unicidad de levantamientos son iguales en todo U y por tanto $V = p|_U^{-1}(U) = s(U)$ puesto que $p|_U$ es un homeomorfismo. Así vemos que $s(X)$ es abierto.
El mismo argumento permite mostrar que $\widetilde{X} \setminus s(X)$ es abierto, y por tanto $s(X)$ es cerrado. Como $\widetilde{X}$ es conexo concluimos que $s(X) = \widetilde{X}$. Esto significa que p es un homeomorfismo pues s es su inversa.

□

Problema 4. Sea G un grupo topológico conexo por arcos y $H \subseteq G$ un subgrupo normal discreto. Muestre que la proyección al cociente $\pi : G \to G/H$ es un revestimiento topológico de G/H.

Demostración. En la Ayudantía 1. ya vimos que G/H dotado de la topología cociente es un grupo topológico y que la pryección π es un mapeo abierto. Dado que H es discreto, todo subconjunto de H es abierto y cerrado en H. En particular, si $e \in G$ denota la identidad existe $W \subseteq G$ abierto tal que $W \cap H = \{e\}$. Ahora, como la aplicación $G \times G \to G, gh \mapsto gh^{-1}$ es continua, existe una vecindad $e \in V$ de la identidad tal que $VV^{-1} \subseteq W$. Tenemos que $U = p(V)$ es una vecindad abierta de e en G/H. Probemos que U es regularmente cubierto por π. Tenemos que

$$\pi^{-1}(U) = \pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{h\in H} hV$$

donde cada hV es un abierto de G. Notemos ahora que los abiertos hV son disjuntos. En efecto, si $h, k \in H, h \neq k$ y $hV \cap kV \neq \emptyset$ entonces existen $v, w \in V$ tales que $hv = kw$ y por tanto $vw^{-1} = h^{-1}k \in VV^{-1} \cap H \subseteq W \cap H = \{e\}$ y por ende $v = w$, lo cual supone una contradicción. Resta entonces probar que $p|_{hV} : hV \to U$ es un homeomorfismo. En primer lugar, es sobreyectiva pues $p(hV) = p(h)p(V) = p(V) = U$, pues $h \in H = \ker(\pi)$. Además, $p|_{hV}$ es inyectiva pues si $\pi(hv) = \pi(hw)$ entonces $\pi(h) = \pi(w)$, i.e., $\pi(vw^{-1}) = e$ y luego $vw^{-1} \in VV^{-1} \cap H = \{e\}$.
Dado que tenemos un abierto U de la identidad en G/H regularmente cubierto por π, es directo ver que dado $[x] \in G/H$ entonces $[x]U$ está regularmente cubierto por π. □