Profesor: Pedro Montero
Ayudante: Sebastián Fuentes

Pauta Ayudantía 3 Topología

Homotopía y Grupo Fundamental

1 de abril de 2024

Problema 1. Sea X un espacio topológico y consideremos el cono sobre X, definido como $CX := (X \times [0,1])/\mathscr{R}$ con la identificación $(x,1) \sim (x',1)$ para todos $x, x' \in X$.

1. Muestre que para todo espacio X, el cono CX es contractible.
2. Sea Y un espacio topológico y $f : X \to Y$ un mapeo. Muestre que f es homotópico a un mapeo constante si y solo si existe un mapeo $F : CX \to Y$ tal que $F \circ \iota_X = f$.
3. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ el cono sobre la esfera $C\mathbb{S}^n$ es homeomorfo a la bola unitaria cerrada $\mathbb{B}^{n+1}$.

Demostración.

1. Consideramos en primer lugar el siguiente mapeo:

$$H' : (X \times I) \times I \to X \times I, \quad ((x,t),s) \mapsto (x, t(1-s)+s)$$

el cual verifica:

$$H'((x,t),0) = (x,t), \quad H'((x,t),1) = (x,1) \quad \forall (x,t) \in X \times I$$

i.e., es una homotopía de la identidad en el cilindro $X \times I$ a la proyección al borde superior del cilindro. Consideremos $\pi : X \times I \to CX, \quad (x,t) \mapsto [(x,t)]$ la proyección al cociente, con la cual podemos formar la composición $\pi \circ H'((x,t),s) = [(x, t(1-s)+s)]$. Notemos ahora que $\pi \circ H'$ es constante en las clases de equivalencia de $\mathscr{R}$. En efecto, si consideramos $(x,1),(x',1) \in X \times I$ entonces

$$\pi \circ H'((x,1),s) = [(x,(1-s)+s] = [(x,1)] = [(x',1)] = [(x',(1-s)+s)] = \pi \circ H'((x',1),s)$$

Así, por propiedad universal del cociente $\pi \circ H'$ induce un mapeo el siguiente mapeo en el cociente:

$$H : CX \times I \to CX, \quad [(x,t)] \mapsto [(x, t(1-s)+s)]$$

Este mapeo verifica las siguientes relaciones:

$$H([(x,t)],0) = [(x,t)], \quad H([(x,t)],1) = [(x,1)] \quad \forall [(x,t)] \in CX$$

i.e., H define una homotopia de id_{CX} en un mapeo constante (el vértice superior del cono).

2. ($\Leftarrow$) Supongamos primero que tal F existe. Entonces vemos que $F \circ \pi : X \times I \to Y$ es una homotopía de f en un punto, pues:

$$F \circ \pi(x,0) = F([(x,0)]) = F \circ \iota_X(x) = f(x), \quad F \circ \pi(x,1) = F([(x,1)]) \quad \forall x \in X$$

($\Rightarrow$) Suponer ahora que f es homotópico a un mapeo constante con homotopía $H : X \times I \to Y$ tal que $H|_{X \times \{1\}}$ es constante. Entonces por propiedad universal del cociente esta función se factoriza como $H = F \circ \pi$ con $F : CX \to Y$ una función continua. Esta función claramente cumple que:

$$F \circ \iota_X(x) = F([x,0]) = F \circ \pi(x,0) = H(x,0) = f(x)$$

3. Definimos el mapeo:

$$f : \mathbb{S}^n \times I \to \mathbb{B}^{n+1}, \quad (x,t) \mapsto (1-t)x$$

el cual cumple que $f(x,1)=0$ para todo $x\in\mathbb{S}^n$ y es inyectivo en $\mathbb{S}^n\times[0,1)$. Además es sobreyectivo pues si $y\in\mathbb{B}^{n+1}$, basta tomar $x:=y/\|y\|, t:=1-\|y\|$ (i.e., todo punto en la bola está determinado por un ángulo y un radio). De esta forma, f induce un mapeo en el cociente $\overline{f}:CX\to\mathbb{B}^{n+1}$ tal que $f=\overline{f}\circ\pi$, el cual es biyectivo por las propiedades antes mencionadas, y por tanto para concluir resta ver que el mapeo inverso es continuo. Haremos esto probando que f es un mapeo cerrado.
Para ello notemos que $\mathbb{S}^n\times I$ es compacto y por tanto $C\mathbb{S}^n$ es compacto, y además $\mathbb{B}^{n+1}$ es Hausdorff. Juntando estas propiedades tenemos que si $F\subseteq C\mathbb{S}^n$ es un cerrado, $\overline{f}(C)$ es compacto en $\mathbb{B}^{n+1}$ y por ende es cerrado. Así, $\overline{f}$ es un homeomorfismo.

□

Problema 2. Sea X un espacio topológico. Mostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Todo mapeo $\mathbb{S}^1\to X$ es homotópico a un mapeo constante.
2. Todo mapeo $\mathbb{S}^1\to X$ se extiende a un mapeo $\mathbb{B}^2\to X$.
3. $\pi_1(X,x_0)=0$ para todo $x_0\in X$.

En particular, un espacio X es simplemente conexo si y solo si todos los mapeos $\mathbb{S}^1\to X$ son homotópicos.

Demostración. ((2) ⇒ (1)) Suponer que todo mapeo $f:\mathbb{S}^1\to X$ se extiende a un mapeo $\overline{f}:\mathbb{B}^2\to X$. Claramente $\mathbb{B}^2$ es contractible y podemos tomar una homotopía $H:\mathbb{B}^2\times I\to\mathbb{B}^2$ entre la identidad y un mapeo constante. Obtenemos el mapeo $\overline{f}\circ H:\mathbb{B}^2\times I\to X$ el cual podemos restringir a $\mathbb{S}^1\times I$ para obtener una homotopía $g:\mathbb{S}^1\times I\to X$ entre f y una constante, pues:

$$g(x,0)=\overline{f}\circ H(x,0)=\overline{f}(x)=f(x)$$

((1) ⇒ (2)) Suponer que tenemos $f:\mathbb{S}^1\to X$ y una homotopía $H:\mathbb{S}^1\times I\to\mathbb{S}^1$ entre f y un mapeo constante, i.e., $H|_{\mathbb{S}^1\times\{1\}}$ es constante. Tenemos así un mapeo inducido en el cociente $\overline{H}:(\mathbb{S}^1\times I)/(\mathbb{S}^1\times\{1\})\to X$. Notar ahora que simplemente por definición $(\mathbb{S}^1\times I)/(\mathbb{S}^1\times\{1\})\cong C\mathbb{S}^1$, y del Problema 1 tenemos el homeomorfismo:

$$\varphi:\mathbb{B}^2\to C\mathbb{S}^1,\quad x\mapsto\left(\frac{x}{\|x\|},1-\|x\|\right)$$

así que componiendo obtenemos un mapeo $\overline{f}:=\overline{H}\circ\varphi:\mathbb{B}^2\to X$ el cual extiende f pues:

$$\overline{f}(x)=H\circ\varphi(x)=H(x,0)=f(x)\quad\forall x\in\mathbb{S}^1$$

((3) ⇒ (1)) Sea $f:\mathbb{S}^1\to X$ y tomemos como hipótesis que $\pi_1(X,x_0)=\{0\}$. Considerado $\mathbb{S}^1$ como el cociente de $I=[0,1]$ por la relación $0\sim 1$, denotando por $\pi:I\to\mathbb{S}^1$ la proyección tenemos que $\gamma:=f\circ\pi:I\to X$ es un lazo en X pues $\gamma(0)=\gamma(1)=:x_0$. La hipótesis implica directamente que γ es homotópico al camino constante en x_0, i.e., existe $H:I\times I\to X$ homotopía desde γ a c_{x_0} relativa a $\{0,1\}$, i.e., $H(0,t)=H(1,t)=x_0$ para todo $t\in I$. Esto significa que H induce una aplicación en el cociente $\overline{H}:\mathbb{S}^1\times I\to X$ la cual da una homotopía entre f y un mapeo constante, dado que:

$$\overline{H}([x],0)=H(x,0)=\gamma(x)=f([x]),\quad\overline{H}([x],1)=H(x,1)=x_0\quad\forall x\in I$$

((2) ⇒ (3)) En primer lugar notemos que hay un retracto de deformación de $\mathbb{B}^2$ en un punto $\overline{x}\in\partial\mathbb{B}^2=\mathbb{S}^1$ dado por la homotopía:

$$H:\mathbb{B}^2\times I\to\mathbb{B}^2,\quad(x,t)\mapsto(1-t)x+t\overline{x}$$

Sea $\gamma:I\to X$ un lazo basado en x_0. Este define entonces un mapeo en el cociente $\overline{\gamma}:\mathbb{S}^1\to X$ (identificando $0\sim 1$ como es usual) y por hipótesis tenemos una extensión $f:\mathbb{B}^2\to X$ de este mapeo. Considerando la inclusión $i:\mathbb{S}^1\to\mathbb{B}^2$ y la homotopía dada por el retracto de deformación de $\mathbb{B}^2$ en el punto $i([0])\in\mathbb{S}^1$, podemos armar la siguiente :composición:

$$h:I\times I\xrightarrow{\pi\times\mathrm{id}}\mathbb{S}^1\times I\xrightarrow{i\times\mathrm{id}}\mathbb{B}^2\times I\xrightarrow{H}\mathbb{B}^2\xrightarrow{f}X$$

la cual verifica:

$$h(s,0) = f \circ H(i([s]),0) = f(i([s])) = \overline{\gamma}([s]) = \gamma(s) \quad , \quad h(s,1) = f \circ H([s],1) = f(i([0])) = \overline{\gamma}([0]) = \gamma(0) = x_0$$
$$h(0,t) = f \circ H(i([0]),t) = f(i([0])) = \overline{\gamma}([0]) = \gamma(0) = x_0 = h(1,t)$$

i.e., h define una homotopía entre γ y el camino constante c_{x_0}. □

Problema 3. Sean $(X,x_0),(Y,y_0)$ espacios basados. Muestre que hay un isomorfismo de grupos

$$\pi_1\left(X \times Y,(x_0,y_0)\right) \cong \pi_1\left(X,x_0\right) \times \pi_1\left(Y,y_0\right)$$

Demostración. Definimos la función:

$$\begin{aligned} \varphi : \pi_1\left(X \times Y,(x_0,y_0)\right) &\to \pi_1\left(X,x_0\right) \times \pi_1\left(Y,y_0\right) \\ [\gamma] &\mapsto ([\pi(pr_1),\pi_1(pr_2)])([\gamma]) := ([pr_1 \circ \gamma],[pr_2 \circ \gamma]) \end{aligned}$$

donde $pr_1 : X \times Y \to X, pr_2 : X \times Y \to Y$ son las proyecciones coordenadas.
Esta función está bien definida por Proposición vista en clases (ver sección §4. del apunte de clases), y por la misma Proposición cada coordenada es un morfismo de grupos. Así, considerando la estructura de grupo del producto directo tenemos que:

$$\begin{aligned} \varphi([\gamma]\cdot[\gamma']) &= \varphi([\gamma\cdot\gamma']) \\ &= (\pi_1(pr_1)([\gamma\cdot\gamma']),\pi_1(pr_2)([\gamma\cdot\gamma'])) \\ &= (\pi_1(pr_1)([\gamma])\cdot\pi_1(pr_1)([\gamma']),\pi_1(pr_2)([\gamma])\cdot\pi_1(pr_2)([\gamma'])) \\ &= (\pi_1(pr_1)([\gamma]),\pi_1(pr_2)([\gamma]))\cdot(\pi_1(pr_1)([\gamma']),\pi_1(pr_2)([\gamma'])) \\ &= \varphi([\gamma])\cdot\varphi([\gamma']) \end{aligned}$$

i.e., φ es un morfismo de grupos.
Resta entonces mostrar que esta función es biyectiva, para lo cual definimos:

$$\begin{aligned} \psi : \pi_1\left(X,x_0\right) \times \pi_1\left(Y,y_0\right) &\to \pi_1\left(X \times Y,(x_0,y_0)\right) \\ ([\gamma_X],[\gamma_Y]) &\mapsto [(\gamma_X,\gamma_Y)] \end{aligned}$$

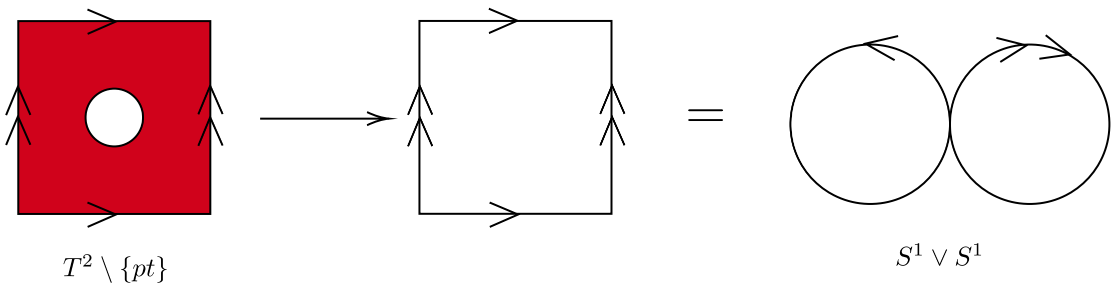
En primer lugar se debe probar que esta función está bien definida, lo cual significa que si $\gamma_X \simeq \gamma'_X$ son lazos homotópicos en X basados en x_0 y $\gamma_Y \simeq \gamma'_Y$ son lazos homotópicos en Y basados en y_0 entonces $(\gamma_X,\gamma_Y) \simeq (\gamma'_X,\gamma'_Y)$.
Esto ya fue probado en el Problema 3.1 de la Ayudantía 2.
Concluimos entonces notando que ψ es el morfismo inverso de φ:

$$\psi \circ \varphi([\gamma]) = \psi([pr_1 \circ \gamma],[pr_2 \circ \gamma]) = [(pr_1 \circ \gamma, pr_2 \circ \gamma]) = [\gamma] \quad \forall [\gamma] \in \pi_1\left(X \times Y,(x_0,y_0)\right)$$

□

Problema 4. Considere el espacio $X = \mathbb{T}^2 \setminus \{(1,1)\}$ consistente del toro menos un punto. Demuestre que X tiene el mismo tipo de homotopía que $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$.

Demostración. Para este problema debemos entender bien los espacios involucrados. En primer lugar, recordemos que el toro $\mathbb{T}^2$ se puede construir como el cociente de un cuadrado identificando sus lados paralelos, así que el toro menos 1 punto se puede visualizar como el cuadrado rojo en la imagen de abajo. Por otro lado, el bouquet de esferas $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ se puede visualizar módulo homemorfismo como el borde del cuadrado con los lados paralelos identificados.



Considerando lo anterior, lo único que se debe probar entonces es que el cuadrado menos 1 punto se puede retractar a su borde, pues esto nos dará la existencia de una homotopía entre estos dos espacios, y dado que la relación de equivalencia considerando en estos espacios es la misma, esta homotopía bajará al cociente de manera adecuada dando la conclusión del ejercicio. Considerando que el punto eliminado en el toro (visto como un cuadrado con lados identificados) es el $(0,0)$, la idea de la homotopía entonces será trazar la línea entre el $(0,0)$ y cada punto del cuadrado, retractaremos los puntos hacia el borde moviéndolos sobre la línea. Realizando esta parametrizacion llegamos a la función:

$$H : X \times I \to X, \quad ((x,y),t) \mapsto \begin{cases} \left(t\frac{x}{|y|} + (1-t)x, t\frac{y}{|y|} + (1-t)y\right) & |y| > |x| \\ \left(t\frac{x}{|x|} + (1-t)x, t\frac{y}{|x|} + (1-t)y\right) & |x| > |y| \end{cases}$$

la cual es continua por el lema de pegado y verifica ser una homotopía entre la identidad y el borde del cuadrado. □