UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Profesor: Pedro Montero
Ayudante: Sebastián Fuentes

Pauta Ayudantía 2 Topología

Conexidad y homotopía

18 de marzo de 2024

Problema 1. El objetivo de este problema es probar propiedades básicas de espacios conexos y localmente conexos. Considere X espacio topológico arbitrario.

1. Si U, V son una separación por abiertos de X,i.e., abiertos tales que $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$ y $Y \subseteq X$ es un subespacio conexo entonces $Y \subseteq U$ o bien $Y \subseteq V$.
2. Para todo subespacio conexo $C \subseteq X$, pruebe que si $C \subseteq A \subseteq \overline{C}$ entonces A es conexo.
3. Sea $\{C_i\}_{i \in I}$ una familia de subespacios conexos (resp. conexos por arcos) de X tal que existe $i_0 \in I$ tal que $C_{i_0} \cap C_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$. Pruebe que $C := \bigcup_{i \in I} C_i$ es conexo (resp. conexos por arcos).
4. Defina la relación de equivalencia
$$x \sim y \quad \iff \quad \exists C \subseteq X \quad \text{conexo tal que} \quad x, y \in C$$
y pruebe que las clases de equivalencia de esta relación son las componentes conexas.
Muestre que las componentes conexas son cerradas y disjuntas y X es la unión de sus componentes conexas.
5. Demuestre que un espacio topológico conexo y localmente conexo por arcos es conexo por arcos.
6. Muestre que X es localmente conexo (resp. localmente conexo por arcos) si y solo si para todo abierto $U \subseteq X$, las componentes conexas (resp. localmente conexo por arcos) de U son abiertas.

Demostración.

1. Notar que $U \cap Y, V \cap Y$ son abiertos de Y disjuntos y tales que $(U \cap Y) \cup (V \cap Y) = (U \cup V) \cap Y = Y$. Dado que Y es conexo $Y \cap V = \emptyset$ o bien $Y \cap U = \emptyset$.
2. Suponer que tenemos una partición por abiertos no vacíos $A = U \cup V$ de A. Por el punto anterior $C \subseteq U$ o bien $C \subseteq V$. Sin pérdida de generalidad si $C \subseteq U$ entonces $\overline{C} \subseteq \overline{U}$. Notar que de hecho $\overline{U} \cap V = \emptyset$ y por lo tanto $A \cap V = \emptyset$, lo cual supone una contradicción pues V es no vacío.
3. Si U, V son abiertos de C tales que $C = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$ entonces $C_i \subseteq U \cup V$ para todo $i \in I$. Como los C_i son conexos se deduce que $C_i \subseteq U$ o bien $C_i \subseteq V$, para todo $i \in I$. En particular se deduce que $C_{i_0} \subseteq U$ o bien $C_{i_0} \subseteq V$. Si suponemos que $C_{i_0} \subseteq U$ entonces $C_i \subseteq U$ para todo $i \in I$, puesto que $C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$. En consecuencia $C \subseteq U$ así que C es conexo.
4. Para concluir que las clases de equivalencia de esta relación corresponden a las componentes conexas (definidas como los subespacios conexos maximales respecto a la inclusión) basta probar que las clases de equivalencia son conexas, pues por definición serán maximales respecto de la inclusión. Sea C una clase de equivalencia y $x \in C$. Para cada $y \in C$ por definición $x \sim y$ así que existe un subespacio conexo C_y tal que $x, y \in C_y$. Tenemos así que $C_y \subseteq C$ (por definición) y luego
$$C = \bigcup_{y \in C} C_y$$
concluyendo que C es conexo gracias al punto 3. pues $x \in C_y$ para todo $y \in C$.
El hecho que sea una relación de equivalencia implica inmediatamente que las componentes son disjuntas y que su unión es todo el espacio X. Que las componentes sean cerradas sigue directamente del ítem 2. y que las componentes son subconjuntos conexos maximales.

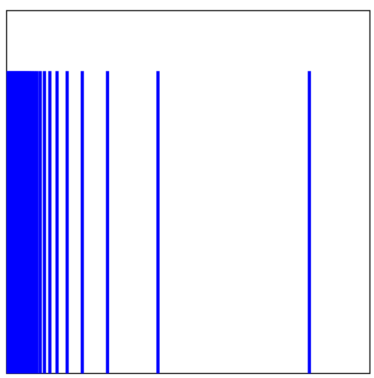
5. Sea X conexo y localmente conexo por arcos y sea $x \in X$. Sea C la componente conexa por arcos de x, i.e., el conjunto de todos los puntos en X para los cuales existe un camino desde x. Queremos probar que $C = X$, para lo cual es suficiente probar que C es abierto y cerrado pues por hipótesis X es conexo. Ya probamos que C es cerrado, así que probaremos que C es abierto. Sea $c \in C$. Como X es localmente conexo por arcos podemos tomar $c \in U$ abierto conexo por arcos. Si $y \in U$ entonces existe un camino desde y a c, y dado que $c, x \in C$, existe un camino desde c a x. Juntando estos caminos obtenemos un camino desde y a x y por tanto $y \in C$. Hemos probado así que $U \subseteq C$, por tanto C es abierto y $C = X$.
6. ($\Rightarrow$) Sea X localmente conexo, $U \subseteq X$ abierto y $C \subseteq U$ componente de U. Si $x \in C$ podemos tomar un abierto conexo $x \in V \subseteq U$, y como C es una componente se debe tener que $V \subseteq C$. Así, C es abierto en X.
($\Leftarrow$) Supongamos que las componentes de todo abierto de X son abiertas en X. Dado $x \in X$ y un abierto $x \in U$, consideremos C como la componente conexa de x en U. Entonces C es conexo y como es abierto en X tenemos que X es localmente conexo en x.

Las versiones para conexidad por arcos son similares y quedan como ejercicio. $\square$

Problema 2. El objetivo de este problema es analizar las propiedades de conexidad y contractibilidad de un espacio específico. Sea $I = [0, 1]$. Definimos el peine topológico como

$$P = I \times \{0\} \cup \left(\left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^{\geq 1} \right\} \times I \right) \cup \{0\} \times I$$

1. Demuestre que P es conexo (resp. conexo por arcos) pero no es localmente conexo (resp. localmente conexo por arcos).
2. Pruebe que P es contractible.



Demostración.

1. Para ver que P es conexo por arcos basta notar lo siguiente. Denotemos $S_0 = \{0\} \times I$ y $S_n := \{1/n\} \times I$, y notemos que todos estos conjuntos son segmentos de recta y por tanto son conexos por arcos. Además denotemos $S = I \times \{0\}$ espacio que también es conexo por arcos. Notamos entonces que

$$P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n \cup S \qquad \text{y} \qquad S \cap S_n = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$$

y por tanto se tiene que P es conexo por arcos por el Problema 1.3.
Para concluir lo segundo es suficiente probar que P no es localmente conexo. Considerar $z \in \mathbb{R}$ tal que $0 < z \leq 1$ y sea

$$U = \{(x, y) \in P : y > 0\}$$

el cual es un conjunto abierto y $(0, z) \in U$. Sea $V \subseteq X$ abierto tal que $(0, z) \subseteq V \subseteq U$. El objetivo es entonces probar que V es disconexo. Para ello notamos que podemos considerar un $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ suficientemente grande tal que $(1/n, z) \in V$. Consideremos entonces $w \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ tal que $1/w$ no sea entero y $0 < q < 1/n$. Definimos

$$V_1 = \{(x, y) \in V : x < q\} \qquad V_2 = \{(x, y) \in V : x > q\}$$

Estos conjuntos son abiertos y verifican que $V = V_1 \cup V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, pues no hay puntos de la forma (q, y) en V. Por tanto V no es conexo y cocnluimos que P no es localmente conexo.

2. Para probar que X es contractible basta probar que la aplicación identidad Id_X es homotópica a una aplicación constante. Para ello definimos la aplicación:

$$H : X \times I \to X, \qquad ((x, y), t) \mapsto \begin{cases} (x, (1-2t)y) & \text{si} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ ((2-2t)x, 0) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Ahora, notemos que esta función está bien definida y es continua por el Lema del pegado y además

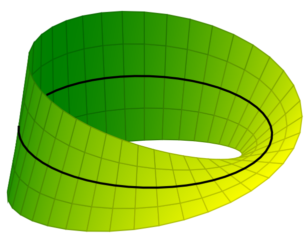
$$H((x,y),0) = (x,y) \qquad H((x,y),1) = (0,0) \quad \forall (x,y) \in X$$

i.e., H es una homotopía desde la identidad a la aplicación constante igual a $(0,0)$.

$\square$

Problema 3. En este problema se pretende estudiar algunas propiedades de equivalencias homotópicas y analizar un ejemplo explícito.

1. Si $X \simeq Y$ y $X' \simeq Y'$ son espacios topológicos homotópicamente equivalentes, muestre que los productos $X \times Y$ y $X' \times Y'$ son homotópicamente equivalentes.
2. Sea C un espacio contractible y X un espacio topológico. Demuestre que $X \times C$ tiene el mismo tipo de homotopía que X.
3. Considerar la cinta de Möebius X, definida como el cociente del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ por la identificación $(x, 0) \sim (1-x, 1)$ para todo $x \in [0,1]$. Demuestre que X es homotópicamente equivalente a $\mathbb{S}^1$.



Demostración.

1. Considerar $f : X \to Y, g : Y \to X, f' : X' \to Y', g' : Y' \to X'$ mapeos definiendo las equivalencias homotópicas del enunciado, i.e.,

$$g \circ f \simeq \mathrm{Id}_X, \quad f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y, \quad g' \circ f' \simeq \mathrm{Id}_{X'}, \quad f' \circ g' \simeq \mathrm{Id}_{Y'}$$

Probaremos entonces que $(g \times g') \circ (f \times f') \simeq \mathrm{Id}_{X \times X'}$. Sea $H : X \times I \to X$ una homotopía de $g \circ f$ a Id_X y $H' : X' \times I \to X'$ homotopía de $g' \circ f'$ a $\mathrm{Id}_{X'}$. Por definición se cumplen las relaciones

$$H(x,0) = g(f(x)), \quad H(x,1) = x \quad \forall x \in X, \quad \text{y} \quad H'(x,0) = g'(f'(x)), \quad H'(x,1) = x \quad \forall x \in X'$$

Podemos entonces formar el producto

$$H \times H' : X \times I \times X' \times I \to X \times X \times X', \quad (x, t, x', s) \mapsto (H(x,t), H'(x', s))$$

la cual es continua por propiedad de la topología producto. Consideremos ahora el mapeo diagonal $\Delta : I \to I \times I, t \mapsto (t,t)$. Entonces vemos que la composición $H'' := (H \times H') \circ \Delta$ define una homotopía $(g \times g')(f \times f') \simeq \mathrm{Id}_{X \times X'}$ pues

$$H''(x, x', 0) = (H(x,0), H'(x',0)) = (g \circ f(x), g' \circ f'(x')) = (g \circ f) \times (g' \circ f')(x, x') \quad \forall x \in X, x' \in X'$$

y

$$H''(x, x', 1) = (H(x,1), H'(x',1)) = (x, x') \forall x \in X, x' \in X'$$

De manera análoga se construye una homotopía $(f \times f')(g \times g') \simeq \mathrm{Id}_{Y \times Y'}$.

2. Esto se sigue del punto anterior pues si $C \simeq \{*\}$ es contractible $X \times C \simeq X \times \{*\} \simeq X$.

3. Lo primero que se debe notar es que X contiene una copia de $\mathbb{S}^1$. En efecto, notar que el subconjunto $[0,1] \times \{1/2\} \cong [0,1]$ en el cociente aparece con la identificación $(0,1/2) \sim (1,1/2)$, i.e., $(([0,1] \times \{1/2\})/\sim) \cong \mathbb{S}^1$.
   Por observación vista en clases es suficiente construir un retracto de deformación de X a $([0,1] \times \{1/2\})/\sim)$. El candidato a retracto más sencillo es
   $$r : X \to ([0,1] \times \{1/2\})/\sim), \qquad [(x,y)] \mapsto [(x,1/2)]$$
   y debemos encontrar entonces una homotopia $i \circ r \simeq \mathrm{Id}_X$ donde $i : ([0,1] \times \{1/2\})/\sim) \hookrightarrow X$ es la inclusión. Para ello definimos el mapeo:
   $$F : X \times I \to X, \quad ([(x,y)],t) \mapsto \left[\left(x, \frac{t}{2} + (1-t)y\right)\right]$$
   el cual es la homotopía deseada. Notar que este mapeo es continuo pues es el descenso al cociente de la composición de $I^3 \to I^2, (x,y,t) \mapsto (x, t/2 + (1-t)y)$ con la proyección $\pi : I^2 \to X$.

$\square$