Profesor: Pedro Montero
Ayudante: Sebastián Fuentes

Pauta Ayudantía 1 Topología

Repaso topología general

18 de marzo de 2024

Problema 1. (topología cociente inducida) Sea X un espacio topológico y $\mathscr{R}$ una relación de equivalencia en X, y sea $\pi : X \to X/\mathscr{R}$ la proyección canónica. Sea $A \subseteq X$ un subconjunto arbitrario y $\mathscr{R}_A := \mathscr{R} \cap (A \times A)$ la relación de equivalencia inducida en A. Así, hay una inclusión continua $A/\ \mathscr{R}_A \hookrightarrow X/\mathscr{R}$. Suponga que alguna de las condiciones siguientes se verifica

1. Todo abierto saturado de A es la traza sobre A de un abierto saturado de X.
2. A es abierto y π es una función abierta.
3. A es cerrado y π es una función cerrada.
4. La restricción $\pi|_A : A \to X/\mathscr{R}$ es una función abierta.
5. La restricción $\pi|_A : A \to X/\mathscr{R}$ es una función cerrada.

y demuestre que la topología cociente de $A/\mathscr{R}_A$ coincide con la topología inducida por $X/\mathscr{R}$.

Demostración. Durante este ejercicio denotaremos $\iota : A \to X$ la aplicacion inclusión, $\pi : X \twoheadrightarrow X/\mathscr{R}$ proyección al cociente de X, $\pi_A : X \twoheadrightarrow A/\mathscr{R}_A$ la proyección al cociente de A y

$$j : A/\mathscr{R}_A \hookrightarrow X/\mathscr{R}, \quad [x]_A \mapsto [x]_X$$

la inclusión entre espacios cociente, donde $[\cdot]_A$ denota la clase de equivalencia en $A/\mathscr{R}_A$ y $[\cdot]_X$ la ce de equivalencia en $X/\mathscr{R}$. Notar asi que tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, two heads, "\pi_A"'] & X \arrow[d, two heads, "\pi"] \\ A/\mathscr{R}_A \arrow[r, hook, "j"'] & X/\mathscr{R} \end{tikzcd}$$

En primer lugar debemos entender cada una de las topologías involucradas. Primero, tenemos la topología de A como subespacio de X, i.e., la topología inicial asociada a la inclusión ι, que explícitamente es:

$$\{\iota^{-1}(U) \subseteq A : U \subseteq X \text{ abierto } \}$$

También se tiene la topología cociente en $X/\mathscr{R}$, que corresponde:

$$\{U \subseteq X/\mathscr{R} : \pi^{-1}(U) \subseteq X \text{ abierto } \}$$

y a su vez $A/\mathbb{R}_A$ tiene su propia topología cociente heredada desde A, que corresponde a:

$$\{U \subseteq A/\mathscr{R}_A : \pi_A^{-1}(U) \subseteq A \text{ abierto } \}$$

Finalmente, la inclusión j dota a $A/\mathscr{R}_A$ de su topologia débil, la cual está dada por:

$$\{j^{-1}(U) \subseteq A/\mathscr{R}_A : U \subseteq X/\mathscr{R} \text{ abierto } \}$$

Probaremos en primer lugar que, sin hipótesis adicionales, la topología inicial inducida por j es menos fina que la topología cociente. Sea $U \subseteq A/\mathscr{R}_A$ abierto de la topología inducida por j, i.e., existe $V \subseteq X/\mathscr{R}$ tal que $U = j^{-1}(V)$. Por definición de la topología cociente $\pi^{-1}(V)$ es abierto en X, y ahora notemos que

$$\iota^{-1}(\pi^{-1}(V)) = \pi_A^{-1}(j^{-1}(V)) = \pi_A^{-1}(U)$$

Dado que π la inclusión ι es continua y $\pi^{-1}(V)$ es abierto en X, se tiene que $\pi_A^{-1}(U)$ es un abierto de A, y así por definición de la topología cociente se tiene que $U \subseteq A/\mathscr{R}_A$ es abierto en la topología cociente.
Veremos a continuación cómo cada una de las hipótesis del enunciado permite demostrar la implicancia contraria. Sea $U \subseteq A/\mathscr{R}_A$ abierto en la topología cociente, i.e., $\pi_A^{-1}(U)$ es un abierto de A, hechos que quedan fijos para la demostración de todos los puntos.

1. Notar que $\pi_A^{-1}(U)$ es saturado, así que por hipótesis existe $V \subseteq X$ abierto saturado tal que $\pi_A^{-1}(U) = A \cap V = \iota^{-1}(V)$. Como V es saturado obtenemos que:

$$\pi_A^{-1}(U) = \iota^{-1}(V) = \iota^{-1}(\pi^{-1}(\pi(V))) = \pi_A^{-1}(j^{-1}(\pi(V)))$$

   y dado que π_A es sobreyectiva obtenemos:

$$U = j^{-1}(\pi(V))$$

   Concluimos así el resultado pues como V es saturado, $\pi(V)$ es abierto en $X/\mathscr{R}$ y por la definición de la topología inducida por j vemos que U es abierto en dicha topología.

2. Si asumimos que $\pi|_A$ es abierta, notando que $\pi|_A = \pi \circ \iota$ vemos que:

$$\pi|_A(\pi_A^{-1}(U)) = \pi(\iota(\pi_A^{-1}(U))) = j(\pi_A(\pi_A^{-1}(U))) = j(U)$$

   de donde $j(U)$ es un abierto de $X/\mathscr{R}$ y dado que j es inyectiva tenemos $U = j^{-1}(j(U))$ deduciendo que U es abierto en la topología inicial de j.

3. Idéntico a 2. tomando complemento.

Finalmente, las condiciones 4., 5. implican 2. y 3. respectivamente.
Veamos ahora el ejemplo. □

Definición 1. Decimos que un espacio topológico X es normal si es Hausdorff y si para todo par de cerrados $F, F' \subseteq X$ disjuntos existen abiertos disjuntos U, U' de X tales que $F \subseteq U$ y $F' \subseteq U'$.

Problema 2. El objetivo de este problema es probar propiedades básicas relacionadas con la propiedad de normalidad, en particular para el caso de cocientes y unión disjunta.

1. Probar que un espacio topológico Hausdorff compacto es normal.
2. Sea X un espacio topológico normal. Probar que si $F \subseteq X$ es un cerrado y $U \subseteq X$ es un abierto tal que $F \subseteq U$, entonces existe un abierto $V \subseteq X$ tal que $F \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$.
3. Sea X un espacio topológico normal y sea $\mathscr{R}$ una relación de equivalencia en X tal que la proyección canónica $\pi : X \to X/\mathscr{R}$ es una función cerrada. Probar que $X/\mathscr{R}$ es normal (luego, Hausdorff).
4. Sea X un espacio topológico compacto y sea $\mathscr{R}$ una relación de equivalencia en X. Probar que $X/\mathscr{R}$ es compacto.
5. Probar que la unión disjunta de espacios topológicos normales es normal.

Demostración.

1. Sea X Hausdorff compacto y $F, F' \subseteq X$ cerrados disjuntos. Consideremos $x \in F$ fijo y notemos primero que para cada $y \in F'$ podemos tomar vecindades abiertas disjuntas $x \in U_y, y \in V_y$ pues X es Hausdorff. Realizando este procedimiento para cada punto en F' obtenemos un cubrimiento abierto $\{V_y\}_{y \in F'}$ de F'. Ahora, como F' es cerrado y X es compacto, F' es también compacto y luego existe una cantidad finita de puntos $y_1, \ldots, y_n \in F'$ tales que $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$ es un cubrimiento abierto de F'. Vemos así que el abierto

$$V := V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$$

contiene a F' y es disjunto del abierto

$$U = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$$

que contiene a x. Esto prueba que podemos separar un cerrado en X de cualquier punto fuera por abiertos disjuntos. Usemos esta misma idea nuevamente para concluir. Para cada $x \in F$ consideramos ahora dos abiertos disjuntos U_x, V_x tales que $x \in U_x$ y $F' \subseteq V_x$. Nuevamente consideramos las colecciones $\{U_x\}_{x\in F}, \{V_x\}_{x\in F}$ y notamos que la primera colección es un cubrimiento abierto de F y por tanto podemos considerar finitos $x_1, \ldots, x_n \in F$ tales que $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$ cubra F y definimos:

$$U = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n} \quad \text{ y } \quad V = V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}$$

que son abiertos disjuntos conteniendo F y F' respectivamente.

2. Por definición $C := X \setminus U$ es cerrado y claramente $C \cap F = \emptyset$, y como X es normal podemos considerar abiertos V, W disjuntos tales que $F \subseteq V, C \subseteq W$. Claramente

$$F \subseteq V \subseteq (X \setminus W) \subseteq U$$

Como $X \setminus W$ es cerrado $\overline{V} \subseteq U$, lo cual concluye la demostración.

3. Sean $F, F' \subseteq X/\mathscr{R}$ cerrados disjuntos. Por continuidad $\pi^{-1}(F), \pi^{-1}(F')$ son cerrados disjuntos de X y dado que X es normal podemos considerar $U, V \subseteq X$ abiertos disjuntos tales que $\pi^{-1}(F) \subseteq U$ y $\pi^{-1}(F') \subseteq V$. Como π es una aplicación cerrada si $C_1 = X \setminus U, C_2 = X \setminus V$ entonces $\pi(C_1), \pi(C_2)$ son cerrados de $X/\mathscr{R}$. Consideremos $U_1 := (X/\mathscr{R}) \setminus \pi(C_1)$ y $U_2 := (X/\mathscr{R}) \setminus \pi(C_2)$ abiertos de $X/\mathscr{R}$ y notemos que son disjuntos pues

$$U_1 \cap U_2 = (X/\mathscr{R}) \setminus (\pi(C_1) \cup \pi(C_2)) = (X/\mathscr{R}) \setminus (\pi(C_1 \cup C_2)) = \emptyset$$

Resta entonces ver que $F \subseteq U_1$ y $F' \subseteq U_2$. Sea $y \in F$ y supongamos que $y \notin U_1$. Entonces $y \in \pi(C_1)$ y luego existe $x \in C_1 = X \setminus U$ tal que $y = \pi(x)$, lo cual no es posible pues $x \in \pi^{-1}(F) \subseteq U$. Así, $F \subseteq U_1$ y el otro caso es similar.

4. Basta notar que la proyección canónica es continua (por definición de la topología cociente) y sobreyectiva. Por lo tanto $X/\mathscr{R} = \pi(X)$ es compacto pues es la imagen de un espacio compacto por una función continua.

5. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una colección de espacios topológicos normales y denotemos $X = \coprod_{i\in I} X_i$. Recordar que como conjunto:

$$X = \left\{ (x, i) \in \left(\bigcup_{i\in I} X_i \right) \times I : x \in X_i \right\}$$

y la topología de este conjunto es la topología final asociada a las funciones $f_i(x) = (x, i)$. Así, los cerrados de X son los conjuntos C tales que $f_i^{-1}(C)$ es cerrado en X_i para todo $i \in I$.
Sean $F_1, F_2 \subseteq X$ cerrados disjuntos. Entonces $f_i^{-1}(F_1)$ y $f_i^{-1}(F_2)$ son cerrados disjuntos en X_i para todo $i \in I$. Como dichos espacios son normales, para cada $i \in I$ podemos considerar un par de abiertos disjuntos $U_i, V_i \subseteq X_i$ tales que $f_i^{-1}(F_1) \subseteq U_i, f_i^{-1}(F_2) \subseteq V_i$. Consideremos

$$U := \bigcup_{i\in I} f_i(U_i) \qquad V := \bigcup_{i\in I} f_i(V_i)$$

abiertos de X. Notar que entonces que $F_1 \subseteq f(U)$ y $F_2 \subseteq f(V)$, y claramente $U \cap V = \emptyset$ pues $U_i \cap V_i = \emptyset$ para cada $i \in I$.

$\square$

Definición 2. (grupo topológico) Un grupo topológico G es un grupo dotado de una topología satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. La ley de grupo
$$m : G \times G \to G, \quad (g, h) \mapsto gh$$
es continua, considerando la topología producto en $G \times G$.

2. La inversión
$$i : G \to G, \quad g \mapsto g^{-1}$$
es continua.

Problema 3. Sea G un grupo topológico y $H \subseteq G$ un subgrupo. Demuestre que:

1. $\overline{H}$ es también un subgrupo.
2. si dotamos al grupo cociente G/H de la topología cociente (i.e., la topología final asociada a la proyección al cociente $\pi : G \twoheadrightarrow G/H$), entonces π es una aplicación abierta.
3. Si H es un subgrupo normal entonces $\overline{H}$ también.
4. Si H es normal, entonces G/H dotado de la topología cociente es un grupo topológico.
5. Demuestre que si G es conexo y $U \subseteq G$ es una vecindad de la identidad e, entonces G es generado por U.

Demostración.

1. Basta notar que, como m es continua y $G \times G$ está dotado de la topología producto:
$$m(\overline{H} \times \overline{H}) = m(\overline{H \times H}) \subseteq \overline{m(H \times H)} \subseteq \overline{H}$$
y por tanto el producto se restringe bien a H. En el caso de la inversión el argumento es también la continuidad
$$i(\overline{H}) \subseteq \overline{i(H)} \subseteq \overline{H}$$

2. Sea $U \subseteq G$ abierto y probemos que $\pi(U)$ es un abierto, lo cual significa probar que $\pi^{-1}(\pi(U)) \subseteq G$ lo es. Notemos
$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in U} gH = \bigcup_{h \in H} Uh \subseteq X$$
y ahora, notar que el morfismo $L_g : G \to G, g' \mapsto gg'$ es un homeomorfismo y por lo tanto $\pi^{-1}(\pi(U))$ es abierto pues es unión de abiertos.

3. Recordemos que H un subgrupo es normal si y solo si para cada $g \in G, h \in H$ se tiene que $ghg^{-1} \in H$. Definamos el morfismo $\varphi_g : G \to G, h \mapsto ghg^{-1}$ el cual es también un homeomorfismo (es una composición de multiplicación e inversión) así que
$$\varphi_g(\overline{H}) \subseteq \overline{\varphi_g(H)} \subseteq \overline{H} \quad \forall g \in G$$
lo cual significa que $\overline{H}$ es normal.

4. Mostremos en primer lugar que la inversión es continua. Denotamos por ι_G la inversión en G y $\iota_{G/H}$ la inversión en G/H. Observar que tenemos diagrama conmutativo:
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\iota_G"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/H \arrow[r, "\iota_{G/H}"] & G/H \end{tikzcd}$$

y dado que π, ι_G son continuas, tenemos que la composición $i_{G/H} \circ \pi$ es continua. Ahora, si $U \subseteq G/H$ es un abierto, $\pi^{-1}(\iota_{G/H}^{-1}(U))$ es un abierto de G y por la definición de la topología cociente $\pi^{-1}(V)$ es abierto si y solo si V, deduciendo que $\iota_{G/H}^{-1}(U)$ es abierto y por tanto ι es continua.
Probemos ahora que la multiplicación $m_{G/H}$ es continua. Queremos probar entonces que $m_{G/H}^{-1}(U)$ es abierto en $(G/H) \times (G/H)$. Sea $(g_1H, g_2H) \in m_{G/H}^{-1}(U)$. Notar que $\pi^{-1}(U)$ es una vecindad abierta de g_1g_2 pues $\pi(g_1g_2) = m(g_1H, g_2H) \in U$. Como la muliplicación m_G en G es continua existen abiertos $V, W \subseteq G$ con $g_1 \in V, g_2 \in W$ y tal que $m_G(V \times W) \subseteq \pi^{-1}(U)$. Entonces $\pi(V) \times \pi(W)$ es un abierto de (g_1H, g_2H) y si $(xH, yH) \in \pi(V) \times \pi(W)$, $m(xH, yH) = xyH = \pi(xy) \in \pi(m_G(V \times W)) \subseteq \pi(\pi^{-1}(U)) = U$, así que $(xH, yH) \in m_{G/H}^{-1}(U)$. Así, vemos que $\pi(V) \times \pi(W) \subseteq m_{G/H}^{-1}(U)$ y por lo tanto $m_{G/H}^{-1}(U)$ es abierto.

5. Notemos en primer lugar que si $U, V \subseteq G$ son abiertos entonces su producto UV es un abierto. En efecto, esto se ve notando que:

$$UV = \bigcup_{g \in U} gV$$

y cada uno de los conjuntos gV son abiertos pues la multiplicación es continua. Sea entonces $e \in U \subseteq G$ vecindad de la identidad y para cada $n \in N$, consideremos U_n el conjunto de todos los productos de n elementos en U, que por la observación anterior es abierto. Así, el conjunto $W := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ es abierto. Veremos que es cerrado de lo cual se seguirá la conclusión pues G es conexo. Sea $g \in \overline{W}$. Dado que gU^{-1} es un abierto de g, podemos considerar $h \in W \cap gU^{-1}$. Por tanto $h = gu^{-1}$ para cierto $u \in U$ y como $h \in W$ entonces $h \in U_n$ y así $h = u_1 \cdots u_n$ para ciertos $u_1, \ldots, u_n \in U$. Así, llegamos a que $g = hu = u_1 \cdots u_n u \in U_{n+1} \subseteq W$ así que $W = \overline{W}$.

□