Tarea Análisis Complejo

Profesor: Pedro Montero, Ayudante: Emilio Oyanedel

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Fecha de entrega:[1] Hasta el Viernes 17 de Diciembre de 2021 a las 23h59.

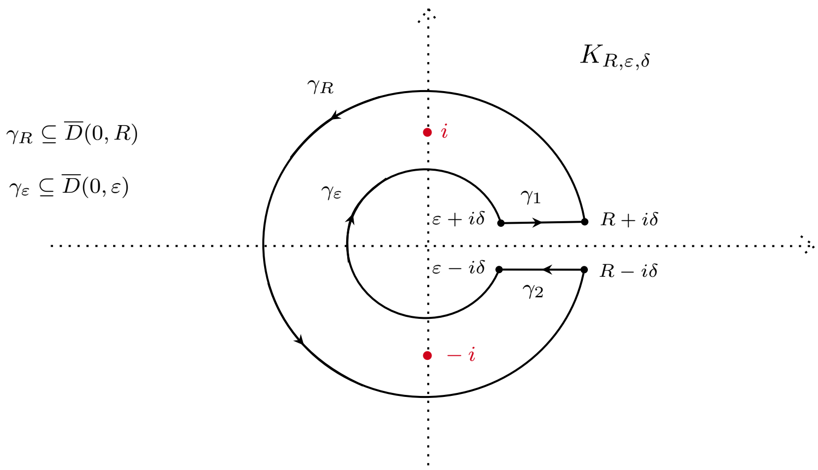
Esta Tarea puede ser realizada individualmente o en parejas, y se debe indicar el nombre de cada integrante. Además, se deben **escoger dos problemas para resolver**.

Problema 1 (50 puntos)

El objetivo de este problema es determinar el valor de la integral impropia

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

Para ello, considere reales positivos $0 < \delta \ll \varepsilon < 1 < R$ y la siguiente región (cf. §27 del Apunte)



y considere la función $f(z) := \dfrac{\log_\pi^3(z)}{z^2+1}$, donde $\log_\pi(z)$ denota la rama del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\geq 0}$.

(a) **(10 pts)** Pruebe que $\int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ y que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 0$.

(b) **(10 pts)** Pruebe que si $z = re^{i\theta}$ con $\theta \in [\delta, 2\pi - \delta]$ entonces

$$\frac{|\log_\pi(z)|^3}{|z^2+1|} \leq \begin{cases} \frac{(\ln^2(r)+4\pi^2)^{3/2}}{r^2-1} & \text{si } r > 1 \\ \frac{(\ln^2(r)+4\pi^2)^{3/2}}{1-r^2} & \text{si } r < 1 \end{cases}$$

y deducir que $\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z,\ \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z \longrightarrow 0$ cuando $\varepsilon \to 0$ y $R \to +\infty$.

(c) **(15 pts)** Determinar el valor de la integral

$$\int_{\partial K_{R,\varepsilon,\delta}} \frac{\log_\pi^3(z)}{z^2+1}\,\mathrm{d}z.$$

(d) **(15 pts)** Notando que $\ln(x)^3 - (\ln(x)+2\pi i)^3 = 8i\pi^3 + 12\pi^2\ln(x) - 6i\pi\ln^2(x)$, deducir el valor de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ y con ello calcular

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

[1] Factor de retraso: 0.7 por 1 día de retraso, 0.55 por 2 días de retraso, 0.01 por 3 días de retraso.

Problema 2 (50 puntos)

El objetivo de este problema es probar el **Principio de incertidumbre de Heisenberg**. Más precisamente, durante este problema consideraremos $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi \in S(\mathbb{R})$ y tal que se cumple que $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 1$. Bajo estas condiciones, probaremos que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\widehat{\psi}(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega\right) \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

Para ello, definamos para todo par de funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de decrecimiento rápido el *producto interno*

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)} \, \mathrm{d}x,$$

cuya norma asociada está dada por $\|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{1/2}$ y verifica la **desigualdad de Cauchy-Schwarz** $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|\|g\|$.

(a) **(10 pts)** Para $f \in S(\mathbb{R})$, defina $F(x) := \overline{f(-x)}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que $\widehat{F}(\omega) = \overline{\widehat{f}(\omega)}$, y que la función $u(x) := (f * F)(x)$ verifica $u(0) = \|f\|^2$ y $\widehat{u}(\omega) = |\widehat{f}(\omega)|^2$.

(b) **(15 pts)** Deducir, a partir del ítem (a), que para toda $f \in S(\mathbb{R})$ se tiene que $\|\widehat{f}\| = \|f\|$.

(c) **(10 pts)** Sea $\psi \in S(\mathbb{R})$ tal que $\|\psi\| = 1$. Probar (eg. integrando por partes) que

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} (x\psi'(x)\overline{\psi(x)} + x\overline{\psi'(x)}\psi(x)) \, \mathrm{d}x,$$

y deducir que $\frac{1}{2} \leq \|\varphi\|\|\psi'\|$, donde $\varphi(x) = x\psi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(d) **(15 pts)** Sea $\psi \in S(\mathbb{R})$ tal que $\|\psi\| = 1$. Probar (eg. usando (b)) que $\|\psi'\|^2 = 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\widehat{\psi}(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega$, y deducir que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\widehat{\psi}(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega\right) \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

Problema 3 (50 puntos)

El objetivo de este problema es probar algunas propiedades sobre homotopía de caminos continuos y sobre el grupo fundamental. Más precisamente, probaremos que la equivalencia homotópica es una relación de equivalencia y que el grupo fundamental tiene estructura de grupo.

Para ello, recordemos que si X es un espacio topológico[2] y $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \longrightarrow X$ son dos caminos (i.e. funciones continuas) tales que $a := \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ y $b := \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, entonces decimos que γ_1 es **homotópicamente equivalente** a γ_2 si existe una función continua

$$h : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X, \; (u,t) \longmapsto h(u,t) := \gamma_u(t)$$

tal que

(i) $h(0,t) = \gamma_1(t)$ y $h(1,t) = \gamma_2(t)$ para todo $t \in [0,1]$.

(ii) $h(u,0) = a$ y $h(u,1) = b$ para todo $u \in [0,1]$.

En tal caso, decimos que h es una **homotopía** desde γ_1 hacia γ_2, y escribimos $\gamma_1 \sim \gamma_2$.

(a) **(10 pts)** Probar que la relación de homotopía es una relación de equivalencia.
Indicación: Para probar la transitividad, considerar una homotopía h' desde γ_1 a γ_2, una homotopía h'' desde γ_2 a γ_3, y defina la función continua[3]

$$h(u,t) := \begin{cases} h'(2u,t) & \text{si } u \in [0, \frac{1}{2}] \\ h''(2u-1,t) & \text{si } u \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

[2] Para efectos de este ejercicio, puede considerar $X = \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto no-vacío si lo desea.
[3] No es necesario probar rigurosamente que las homotopías utilizadas a lo largo del Problema 3 son efectivamente continuas.

En todo lo que sigue, fijaremos $x_0 \in X$ un *punto base*. Recordemos que el **grupo fundamental** de X relativo a $x_0 \in X$ está dado por

$$\pi_1(X, x_0) := \left\{ \begin{array}{c} \text{caminos } \textit{cerrados } \gamma : [0,1] \longrightarrow X \\ \text{tales que } \gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \end{array} \right\} \Big/ \sim_{\text{homotopia}}$$

(b) **(20 pts)** Dados $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \longrightarrow X$ caminos cerrados tales que $\gamma_i(0) = \gamma_i(1) = x_0$ para $i \in \{1,2\}$, definimos el *camino producto* mediante

$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) := \left\{ \begin{array}{cl} \gamma_1(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{array} \right.$$

Probar que $[\gamma_1] \cdot [\gamma_2] := [\gamma_1 \cdot \gamma_2]$ está bien definido en $\pi_1(X, x_0)$ (i.e., no depende de las clases de equivalencia), y que dicha operación es asociativa, i.e.,

$$([\gamma_1] \cdot [\gamma_2]) \cdot [\gamma_3] = [\gamma_1] \cdot ([\gamma_2] \cdot [\gamma_3]) \text{ en } \pi_1(X, x_0).$$

(c) **(10 pts)** Definimos el *camino constante* como $e(t) := x_0$ para todo $t \in [0,1]$. Probar que para toda clase de homotopía $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ se cumple que

$$[\gamma] \cdot [e] = [e] \cdot [\gamma] = [\gamma] \text{ en } \pi_1(X, x_0).$$

(d) **(10 pts)** Dado $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ un camino cerrado tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$, definimos el *camino inverso* mediante $\gamma^-(t) := \gamma(1-t)$ para todo $t \in [0,1]$. Probar que para toda clase de homotopía $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ se cumple que

$$[\gamma] \cdot [\gamma^-] = [\gamma^-] \cdot [\gamma] = [e] \text{ en } \pi_1(X, x_0).$$

En conclusión, el conjunto $\pi_1(X, x_0)$ puede ser dotado de estructura de grupo.