Quiz 2 Análisis Complejo

Profesor: Pedro Montero, Ayudante: Emilio Oyanedel
Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Problema 1 (50 puntos)

El objetivo de este problema es probar que para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\cosh(z) - \cos(z) = z^2 \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z^4}{4\pi^4 n^4}\right)$$

para cada $z \in \mathbb{C}$.

(a) **(20 pts)** Probar que el producto

$$p(z) := z^2 \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z^4}{4\pi^4 n^4}\right)$$

define una función entera.

Solución: Escribimos $p(z) = z^2 \prod_{n\geq 1}(1 + f_n(z))$ con $f_n(z) = \frac{z^4}{4\pi^4 n^4}$. Dado $R \in \mathbb{R}^{>0}$, notamos que si $z \in \overline{D}(0, R)$ entonces $\sum_{n\geq 1} |f_n(z)| \leq \sum_{n\geq 1} \frac{R^4}{4\pi^4 n^4} < +\infty$ converge absolutamente.
Luego, p es holomorfa en cada compacto de $\mathbb{C}$, i.e., $p \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$.

(b) **(10 pts)** Probar que para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$2\sin\left(\frac{(1-i)z}{2}\right)\sin\left(\frac{(1+i)z}{2}\right) = \cosh(z) - \cos(z).$$

Solución: Calculamos $2\sin\left(\frac{(1-i)z}{2}\right)\sin\left(\frac{(1+i)z}{2}\right) = \cos(iz) - \cos(z) \overset{\text{def}}{=} \cosh(z) - \cos(z)$.

(c) **(20 pts)** Deducir que $p(z) = \cosh(z) - \cos(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Solución: Sea $a := \frac{(1-i)}{2}z$ y $b := \frac{(1+i)}{2}z$, y notamos que $a^2 + b^2 = 0$, $ab = z^2/2$ y $a^2b^2 = z^4/4$. Luego, la fórmula del producto de Euler implica que:

$$2\sin(a)\sin(b) = 2ab\prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{a^2}{\pi^2 n^2}\right)\left(1 - \frac{b^2}{\pi^2 n^2}\right) = z^2 \prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{(a^2+b^2)}{\pi^2 n^2} + \frac{a^2 b^2}{\pi^4 n^4}\right) = z^2 \prod_{n\geq 1}\left(1 + \frac{z^4}{4\pi^4 n^4}\right),$$

de donde se concluye que $p(z) = \cosh(z) - \cos(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(Bonus 1) **(5 pts)** Probar (e.g. usando la identidad de Euler para la función seno) que

$$\cos(\pi z) = \prod_{n=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{4z^2}{(2n+1)^2}\right)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.
Indicación: $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$. *Haga cálculos rigurosos: especifíque bajo qué condiciones puede dividir (luego puede extender su resultado a* $\mathbb{C}$ *por extensión analítica).*

Solución: Para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\sin(2\pi z) = 2\sin(\pi z)\cos(\pi z)$$

y luego, gracias a la fórmula de Euler, tenemos que:

$$2\pi z \prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{4z^2}{n^2}\right) = 2\pi z\cos(\pi z)\prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Separando el primer producto en términos pares e impares, obtenemos

$$\prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{4z^2}{n^2}\right) = \prod_{m\geq 1}\left(1 - \frac{4z^2}{(2m)^2}\right)\prod_{m\geq 0}\left(1 - \frac{4z^2}{(2m+1)^2}\right) = \prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)\prod_{m\geq 0}\left(1 - \frac{4z^2}{(2m+1)^2}\right).$$

Así, para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ se tiene que

$$\cos(\pi z) = \prod_{m \geq 0} \left(1 - \frac{4z^2}{(2m+1)^2}\right).$$

Dado que ambos lados de la identidad anterior están dados por funciones enteras, deducimos gracias al principio de extensión analítica que dicha igualdad es válida para todo $z \in \mathbb{C}$.

Problema 2 (50 puntos)

El objetivo de este problema es calcular para $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n} \, \mathrm{d}x.$$

Para ello, considere la función $f(z) := \dfrac{1}{(z^2+1)^n}$.

(a) **(10 pts)** Determine el tipo de singularidades de la función f.

Solución: Dado que

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)^n(z-i)^n},$$

observamos directamente que f posee un polo de orden n en $z_0 = \pm i$. Esto se chequea directamente escribiendo la serie de Laurent respectiva, o bien calculando los límites

$$\lim_{z \to \pm i} (z \pm i)^n f(z) = (\mp 2i)^{-n} \text{ y } \lim_{z \to \pm i} |(z \pm i)^{n-1} f(z)| = +\infty.$$

(b) **(20 pts)** Calcule $\operatorname{Res}(f, z_0)$ para todo $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Im}(z_0) > 0$.
Indicación: Puede usar directamente el hecho que

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left\{(z - z_0)^m f(z)\right\}.$$

si f posee un polo de orden $m \geq 1$ en z_0. Notar que $(-n)(-n-1)\cdots(-2n+2) = (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}$.

Solución: Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Im}(z_0) > 0$. Si $z_0 \neq i$ entonces f es holomorfa en z_0 y luego $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$. Para calcular $\operatorname{Res}(f, i)$ usando la indicación, notamos que $(z-i)^n f(z) = (z+i)^{-n}$ y luego

$$\begin{aligned}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{(z-i)^n f(z)\right\} &= \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{(z+i)^{-n}\right\} \\ &= (-n)(-n-1)\cdots(-2n+2)(z+i)^{-(2n-1)} = (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}(z+i)^{-2n+1}\end{aligned}$$

Así,

$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{1}{(n-1)!}(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}(2i)^{-2n+1} = \frac{-i}{2^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}.$$

(c) **(20 pts)** Probar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2^{2n-2}}\binom{2n-2}{n-1}.$$

Solución: Tal como se discutió en §27, el Teorema de Residuos implica que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x^2+1)^n} \, \mathrm{d}x = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = \frac{\pi}{2^{2n-2}}\binom{2n-2}{n-1}.$$

(Bonus 2) **(5 pts)** Sea $a \in \mathbb{R}^{>0}$. Calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{x^2 + a^2} \, \mathrm{d}x.$$

Solución: Sea

$$f(z) := \frac{z}{z^2 + a^2} = \frac{z}{(z + ia)(z - ia)}.$$

Tal como se discutió en §27, el Teorema de Residuos implica que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ix} \, \mathrm{dx} = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_0) > 0} \mathrm{Res}(f(z) e^{iz}, z_0) = 2\pi i \, \mathrm{Res}(f(z) e^{iz}, ia) = 2\pi i \cdot \frac{ia}{2ia} e^{-a} = i\pi e^{-a}.$$

Tomando parte imaginaria, obtenemos que $\int_{\mathbb{R}} \frac{x \sin(x)}{x^2 + a^2} \, \mathrm{d}x = \pi e^{-a}$.