Quiz 1 Análisis Complejo

Profesor: Pedro Montero, Ayudante: Emilio Oyanedel

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Problema 1 (40 puntos)

El objetivo de este problema es estudiar explícitamente polinomios cuadráticos de variable compleja. Más explícitamente, consideremos la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) \stackrel{\text{def}}{=} f(x+iy) = ax^2 + bxy + cy^2$$

donde $a, b, c \in \mathbb{C}$ son constantes, y donde $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

(a) **(20 pts)** Determinar condiciones suficientes y necesarias sobre los coeficientes $a, b, c \in \mathbb{C}$ de tal suerte que f sea una función entera.
Indicación: La vida es más fácil en las variables $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$.

Solución: El cambio de variable $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ permite reescribir f como

$$f(z) = \frac{1}{4}(a - ib - c)z^2 + \frac{1}{2}(a+c)z\overline{z} + \frac{1}{4}(a + ib - c)\overline{z}^2.$$

Así, la ecuación de Cauchy-Riemann nos dice que $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$ para todo $z_0 \in \mathbb{C}$, i.e.,

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(a+c)z_0 + \frac{1}{2}(a+ib-c)\overline{z_0}$$

para todo $z_0 \in \mathbb{C}$. Notamos (e.g. escogiendo $z_0 = 1$ y $z_0 = i$) que esto implica que $a + b = a + ib - c = 0$, y que a su vez esta condición implica que $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$ para todo $z_0 \in \mathbb{C}$. Así,

$$f \in \mathscr{O}(\mathbb{C}) \text{ si y sólo si } c = -a,\ b = 2ia,$$

lo que a su vez equivale a que $f(z) = ax^2 + 2aixy - ay^2 = a(x+iy)^2 \stackrel{\text{def}}{=} az^2$.

(b) **(10 pts)** Usando los valores de $a, b, c \in \mathbb{C}$ encontrados en el punto (a), determinar $f'(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Solución: El ítem (a) implica que $f'(z) = 2az$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(c) **(10 pts)** Usando los valores de $a, b, c \in \mathbb{C}$ encontrados en el punto (a), y denotando por

$$\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z| = 1\}$$

al borde del disco unitario centrado en el origen (orientado en sentido anti-horario), calcular la integral

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \omega,$$

donde $\omega = f(z)\,\mathrm{d}z$.

Solución: Dado que $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ y $K := \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z| \leq 1\} \subseteq \mathbb{C}$ es un compacto de borde de clase $\mathscr{C}^1$ por pedazos (de hecho, de clase $\mathscr{C}^\infty$), el Teorema de Cauchy-Goursat implica que

$$\int_{\partial K} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

i.e., $\int_{\partial\mathbb{D}} \omega = 0$.

(Bonus 1) **(5 pts)** Determinar condiciones suficientes y necesarias sobre los coeficientes $a, b, c \in \mathbb{C}$ de tal suerte que f sea una función *armónica* en todo el plano complejo (i.e., $\triangle f = 0$ en $\mathbb{C}$). ¿Es posible que f sea armónica pero que no sea holomorfa?

Solución: Por definición, $\triangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ y por ende $\triangle f(z) = 2(a+c)$. Así, f es armónica en $\mathbb{C}$ si y sólo si $c = -a$. Por otro lado, el ítem (a) implica que si $b \neq 2ia$ entonces f es armónica pero **no** es holomorfa.

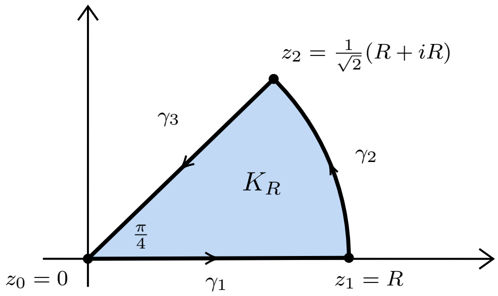
Problema 2 (60 puntos)

El objetivo de este problema es utilizar técnicas de análisis complejo para calcular integrales impropias *reales*. Para ello, considere la función $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = e^{iz^2}$$

Además, para todo $R \in \mathbb{R}^{>0}$ considere el compacto dado por

$$K_R := \{z = re^{i\theta} \text{ tal que } 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \theta \leq \pi/4\}$$



(a) **(5 pts)** Justificar (muy resumidamente) que $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ es una función entera. Determinar su desarrollo en serie de potencia centrada en $z_0 = 0$.

Solución: La exponencial $g(z) = e^z$ y el polinomio $h(z) = iz^2$ son funciones enteras, y por ende $f \overset{\text{def}}{=} g \circ h$ también. Del mismo modo, dado que

$$g(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ para todo } z \in \mathbb{C},$$

se tiene que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n z^{2n}}{n!} \text{ para todo } z \in \mathbb{C}$$

es el desarrollo en serie de potencia centrada en $z_0 = 0$.

(b) **(10 pts)** Determinar $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(x+iy))$ y $v(x,y) = \mathrm{Im}(f(x+iy))$.

Solución: Si escribimos $z = x + iy$, tenemos que

$$f(z) = \exp(iz^2) = \exp(i(x^2 - y^2 + 2ixy)) = \exp(-2xy + i(x^2 - y^2)) = e^{-2xy}(\cos(x^2 - y^2) + i\sin(x^2 - y^2)).$$

Luego, $u(x,y) = e^{-2xy}\cos(x^2 - y^2)$ y $v(x,y) = e^{-2xy}\sin(x^2 - y^2)$.

(c) **(10 pts)** Para todo $R \in \mathbb{R}^{>0}$, determinar el valor de la integral de línea

$$\int_{\partial K_R} f(z)\, \mathrm{d}z.$$

Solución: Dado que $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ y $K_R \subseteq \mathbb{C}$ es un compacto de borde de clase $\mathscr{C}^1$ por pedazos, el Teorema de Cauchy-Goursat implica que $\int_{\partial K_R} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$.

(d) **(20 pts)** Para todo $j \in \{1,2,3\}$, sea $I_j = \int_{\gamma_j} f(z)\, \mathrm{d}z$. Probar que $|I_2| \longrightarrow 0$ cuando $R \longrightarrow +\infty$.
Indicación: Para esto puede usar directamente (sin demostración[1]*) el hecho que para todo* $t \in [0, \pi/2]$ *se tiene que* $\sin(t) \geq 2t/\pi$.

Solución: Consideremos la parametrización $\gamma_2(t) = Re^{it}$ con $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, y notemos que

$$|\exp(i(Re^{it})^2)| = |\exp(iR^2(\cos(2t) + i\sin(2t)))| = |e^{-R^2\sin(2t)}e^{iR^2\cos(2t)}| = e^{-R^2\sin(2t)}.$$

Luego, por definición se tiene

$$I_2 = \int_{\gamma_2} f(z)\, \mathrm{d}z \overset{\text{def}}{=} \int_0^{\pi/4} e^{i(Re^{it})^2} iRe^{it}\, \mathrm{d}t,$$

[1]Esto se prueba considerando la función $g(t) = \frac{\sin(t)}{t}$, que cumple $g'(t) = \frac{t\cos(t) - \sin(t)}{t^2} < 0$ para $t \in]0, \pi/2[$ dado que $t < \tan(t)$ para $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Así, $g(t) \geq g(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$ para todo $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

de donde se deduce (usando la indicación en la segunda desigualdad) que

$$|I_2| \le R\int_0^{\pi/4} e^{-R^2\sin(2t)}\,\mathrm{d}t \overset{2t=s}{=} \frac{R}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-R^2\sin(s)}\,\mathrm{d}s \le \frac{R}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-2R^2 s/\pi}\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{4R}(1-e^{-R^2}) \xrightarrow{R\to+\infty} 0$$

como se quería demostrar.

(e) **(15 pts)** Deducir, utilizando el hecho que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, que

$$A := \int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \qquad \text{y} \qquad B := \int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Solución: Sabemos gracias al ítem (c) que

$$0 = \int_{\partial K_R} f(z)\,\mathrm{d}z = I_1 + I_2 + I_3,$$

donde $I_j = \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z$. Para I_1, consideramos la parametrización $\gamma_1(t) = t$ con $t \in [0, R]$, de donde deducimos que

$$I_1 \overset{\mathsf{def}}{=} \int_0^R e^{it^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^R \cos(t^2)\,\mathrm{d}t + i\int_0^R \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{R\to+\infty} A + iB.$$

Para I_3, consideramos la curva con orientación opuesta $\gamma_3^-(t) = e^{i\pi/4}t$ con $t \in [0, R]$, y deducimos (del hecho que $e^{i\pi/2} = i$ y que $e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$) que

$$I_3 = -\int_{\gamma_3^-} f(z)\,\mathrm{d}z \overset{\mathsf{def}}{=} -\int_0^R e^{it^2 e^{i\pi/2}} e^{i\pi/4}\,\mathrm{d}t \overset{\mathsf{def}}{=} -e^{i\pi/4}\int_0^R e^{-t^2}\mathrm{d}t \xrightarrow{R\to+\infty} -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\left(\sqrt{\frac{\pi}{8}} + i\sqrt{\frac{\pi}{8}}\right),$$

donde el límite se obtiene gracias a que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Finalmente, dado que $|I_2| \xrightarrow{R\to+\infty} 0$ gracias al ítem (d), deducimos que

$$0 = I_1 + I_2 + I_3 \xrightarrow{R\to+\infty} A + iB - \left(\sqrt{\tfrac{\pi}{8}} + i\sqrt{\tfrac{\pi}{8}}\right),$$

i.e., $A = B = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$.

(Bonus 2) **(5 pts)** Describir una estrategia de demostración para probar que para todo $n \in \mathbb{N}^{\ge 2}$ se tiene que

$$\int_0^{+\infty}\sin(x^n)\,\mathrm{d}x = \Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

donde $\Gamma(1+\frac{1}{n}) \overset{\mathsf{def}}{=} \int_0^{+\infty} t^{1/n}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t^n}\,\mathrm{d}t$ es la *función* Γ *de Euler*, señalando las modificaciones respecto al caso $n = 2$.

Solución: Se debe considerar la región

$$K_R := \left\{z = re^{i\theta} \text{ tal que } 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2n}\right\}$$

y la función entera $f(z) = e^{iz^n}$. El Teorema de Cauchy-Goursat implica que $I_1 + I_2 + I_3 = 0$, y tal como antes, $I_1 \xrightarrow{R\to+\infty} A + iB$, donde $B = \int_0^{+\infty}\sin(x^n)\,\mathrm{d}x$. Por otro lado, la curva $\gamma_3^-(t) = e^{i\pi/2n}t$ con $t \in [0, R]$ permite calcular

$$I_3 = -\int_0^R e^{it^n e^{i\pi/2}} e^{i\pi/2n}\,\mathrm{d}t = -e^{i\pi/2n}\int_0^R e^{-t^n}\,\mathrm{d}t \xrightarrow{R\to+\infty} -e^{i\pi/2n}\Gamma\left(1+\tfrac{1}{n}\right).$$

Luego, igualando partes imaginarias, basta probar que $I_2 \xrightarrow{R\to+\infty} 0$ para concluir que $B = \Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

(Bonus 3) **(10 pts)** Utilizar la estrategia del Bonus 2 para calcular $\int_0^{+\infty}\sin(x^n)\,\mathrm{d}x$ para todo $n \in \mathbb{N}^{\ge 2}$.
Observación: No *se pide calcular la integral* $\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t^n}\,\mathrm{d}t$.

Solución: Por la discusión anterior, lo único que resta verificar es que $I_2 \xrightarrow{R\to+\infty} 0$. Para esto último, considerar la parametrización $\gamma_2(t) = Re^{it}$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2n}]$, y notar que $|\exp(i(Re^{it})^n)| = e^{-R^n\sin(nt)}$ y que

$$|I_2| \le R\int_0^{\pi/2n} e^{-R^n\sin(nt)}\,\mathrm{d}t \overset{nt=s}{=} \frac{R}{n}\int_0^{\pi/2} e^{-R^n\sin(s)}\,\mathrm{d}s \le \frac{R}{n}\int_0^{\pi/2} e^{-2R^n s/\pi}\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2nR^{n-1}}(1-e^{-R^n}) \xrightarrow{R\to+\infty} 0.$$

Cultura general: Estas integrales se conocen como Integrales de Fresnel, y son utilizadas en óptica.