Problema 1

Teorema 1. *(Fórmula de Poisson). Sea $f \in \mathcal{F}$, entonces*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

1. Para todo $t \in \mathbb{R}^{>0}$, se define la *función theta*

$$\theta(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$$

Probar, usando adecuadamente la fórmula de Poisson, que

$$\theta(t) = t^{-1/2}\theta(1/t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}^{>0}$$

Demostración. Sabemos que si $f(x) = e^{-\pi x^2}$, entonces $\hat{f}(\omega) = e^{-\pi\omega^2}$, entonces, para $g(x) = f(x\sqrt{t})$

$$\hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x\sqrt{t})e^{-2\pi i x\omega}dx = \frac{1}{\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-2\pi i y\omega/\sqrt{t}}dy = t^{-1/2}\hat{f}(\omega/\sqrt{t})$$

Luego, por la fórmula de Poisson

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = t^{-1/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/t} = t^{-1/2}\theta(1/t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}^{>0}$$

□

2. Probar que para todo $a \in \mathbb{R}^{>0}$ se tiene que

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{a}{a^2+n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi a|n|} = \coth(\pi a)$$

Demostración. Si $f(x) = 1/(1+x^2)$, entones $\hat{f}(\omega) = \pi e^{-2\pi|\omega|}$, luego, si $g(x) = a/(a^2+x^2)$

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{a^2+x^2}e^{-2\pi i x\omega}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(x/a)^2}e^{-2\pi i x\omega}\frac{1}{a}dx = \hat{f}(a\omega) = \pi e^{-2\pi a|\omega|}$$

Utilizando la fórmula de Poisson tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{a}{a^2+n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi a|n|} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2\pi a n} + 1 &= 2\frac{e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}} + 1 \\
&= \frac{2e^{-2\pi a} + 1 - e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}} \\
&= \frac{1+e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}} \\
&= \frac{e^{\pi a}+e^{-\pi a}}{e^{\pi a}-e^{-\pi a}} \\
&= \coth(\pi a)
\end{aligned}$$

□

Problema 2

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua de soporte compacto (i.e., $\exists R\in\mathbb{R}^{>0}$ tal que $f(x)=0$ si $|x|>R$). Probar que si $\hat{f}$ también es una función de soporte compacto, entonces $f\equiv 0$ en $\mathbb{R}$.

Demostración. Como f tiene soporte compacto, $f\in\mathcal{M}(\mathbb{R})$, luego, $\hat{f}$ se extiende de forma holomorfa a todo $\mathbb{C}$. Como $\operatorname{supp}(\hat{f})$ es compacto, $\exists R\in\mathbb{R}^{>0}$ tal que $\hat{f}(\omega)=0$ para todo $|\omega|>R$. De esta forma, $\hat{f}$ tiene ceros que son puntos de acumulación, por lo tanto $\hat{f}\equiv 0$. Finalmente,

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{2\pi i\omega x}d\omega=0$$

$\square$

Problema 3

El objetivo de este problema es resolver la ecuación diferencial

$$a_n\frac{d^n}{dt^n}u(t)+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}u(t)+\cdots+a_0u(t)=f(t)$$

donde $a_0,a_1,\ldots,a_n$ son constantes complejas, y f es una función dada. Aquí, suponemos que f tiene soporte compacto y es suficientemente suave (por ejemplo f de clase $\mathscr{C}^2$).

(a) Sea

$$\hat{f}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-2\pi izt}dt$$

Observe que $\hat{f}$ es una función entera, y usando integración por partes muestre que

$$|\hat{f}(x+iy)|\le\frac{A}{1+x^2}$$

si $|y|\le a$ para $a\ge 0$ fijo.

Demostración. Notemos que $t\mapsto f(t)e^{-2\pi izt}$ es continua y $z\mapsto f(t)e^{-2\pi izt}$ es entera, luego

$$z\mapsto\int_{-N}^{N}f(t)e^{-2\pi izt}dt$$

es entera para todo N, concluyendo que $\hat{f}$ es entera. Además, utilizando integración por partes

$$\hat{f}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-2\pi izt}dt=-\frac{1}{2\pi iz}f(t)e^{-2\pi izt}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{2\pi iz}\int_{-\infty}^{+\infty}f'(t)e^{-2\pi izt}dt$$

el primer término es cero pues f es de soporte compacto. Utilizando integración por partes de nuevo,

$$\hat{f}(z)=\frac{1}{(2\pi z)^2}f'(t)e^{-2\pi izt}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\frac{1}{(2\pi z)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}f''(t)e^{-2\pi izt}dt=-\frac{1}{(2\pi z)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}f''(t)e^{-2\pi izt}dt$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow|\hat{f}(z)|=\left|-\frac{1}{(2\pi z)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}f''(t)e^{-2\pi izt}dt\right|&\le\frac{1}{4\pi^2(x^2+y^2)}\int_{-\infty}^{+\infty}|f''(t)e^{-2\pi izt}|dt\\&\le\frac{1}{4\pi^2(x^2+y^2)}\int_{-M}^{M}|f''(t)|e^{2\pi yt}dt\\&\le\frac{2M}{4\pi(x^2+y^2)}\sup_{t\in[-M,M]}\{|f''(t)|e^{2\pi yt}\}\\&=\frac{B}{x^2+y^2}\\&\le\frac{A}{1+x^2}\end{aligned}$$

donde B es alguna constante y $\operatorname{supp}(f) \overset{\text{def}}{=} \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}} \subseteq [-M, M]$.

$\square$

(b) Definamos

$$P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j (2\pi i z)^j$$

Encuentre un número real c tal que $P(z)$ no se anule en la recta

$$L = \{z \in \mathbb{C} : x + ic, \quad x \in \mathbb{R}\}$$

Solución. Como P es un polinomio, $V(P)$ es finito, por tanto podemos tomar

$$c = \max_{\alpha \in V(P)} \{\operatorname{Im}(\alpha)\} + 1$$

(c) Sea

$$u(t) = \int_L \frac{e^{2\pi i z t}}{P(z)} \hat{f}(z) dz$$

Compruebe que

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \frac{d^j}{dt^j} u(t) = \int_L e^{2\pi i z t} \hat{f}(z) dz$$

y que

$$\int_L e^{2\pi i z t} \hat{f}(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x t} \hat{f}(x) dx$$

Concluya por el Teorema de inversión de Fourier que

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \frac{d^j}{dt^j} u(t) = f(t)$$

Demostración. Para u definido por

$$u(t) = \int_L \frac{e^{2\pi i z t}}{P(z)} \hat{f}(z) dz$$

Entonces

$$\frac{d^j}{dt^j} u(t) = \int_L (2\pi i z)^j \frac{e^{2\pi i z t}}{P(z)} \hat{f}(z) dz$$

Luego, sumando sobre j tenemos

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{d^j}{dt^j} u(t) = \sum_{j=0}^{n} \int_L (2\pi i z)^j \frac{e^{2\pi i z t}}{P(z)} \hat{f}(z) dz = \int_L \cancel{\sum_{j=0}^{n} (2\pi i z)^j} \frac{e^{2\pi i z t}}{\cancel{P(z)}} \hat{f}(z) dz = \int_L e^{2\pi i z t} \hat{f}(z) dz$$

Por otro lado, utilizando la parametrización $z(x) = x + ic$, tenemos que

$$\int_L e^{2\pi i z} \hat{f}(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i (x+ic) t} \hat{f}(x + ic) dx = e^{-2\pi c t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x t} \hat{f}(x + ic) dx$$

Ahora, notemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x + h) e^{2\pi i x t} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{2\pi i t (y - h)} dy = e^{-2\pi i t h} f(t), \qquad \forall h \in \mathbb{R}$$

Como $h \mapsto \hat{f}(x + h) e^{2\pi x t}$ es holomorfa y $t \mapsto \hat{f}(x + h) e^{2\pi i x t}$ es continua, tenemos que

$$h \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x + h) e^{2\pi i x t} dx$$

es holomorfa y por tanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x+h)e^{2\pi ixt}dx = e^{-2\pi ith}f(t), \qquad \forall h \in \mathbb{C}$$

Utilizando $h = ci$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x+ic)e^{2\pi ixt}dx = e^{2\pi ct}f(t)$$

Juntando las expresiones anteriores obtenemos que

$$\int_L e^{2\pi iz}\hat{f}(z)dz = e^{-2\pi ct}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi ixt}\hat{f}(x+ic)dx = f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi ixt}\hat{f}(x)dx$$

Finalmente, por el Teorema de inversión de Fourier,

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \frac{d^j}{dt^j}u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi ixt}\hat{f}(x)dx = f(t)$$

□

Problema 4

Considere la región $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$ y considere la *Ecuación de Laplace*

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{en } \Omega \\ \\ u(x,0) = f(x) & \text{para todo } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1. Deducir que $\hat{u}(\omega, y) = \hat{f}(\omega)e^{-2\pi|\omega|y}$ si $f \in S(\mathbb{R})$.

   Demostración. Si aplicamos transformada de Fourier a la ecuación de Laplace, obtenemos

$$(-2\pi i\omega)^2\hat{u}(\omega,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{u}(\omega,y) = 0$$

$$\Longrightarrow -4\pi^2\omega^2\hat{u}(\omega,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{u}(\omega,y) = 0$$

   Tenemos una EDO en la variable y cuya solución general es

$$\hat{u}(\omega,y) = a(\omega)e^{2\pi\omega y} + b(\omega)e^{-2\pi\omega y}$$

   Notemos que $\hat{u}$ debe tener crecimiento moderado, por lo tanto deducimos que

$$a(\omega) = 0 \quad \forall\omega \in \mathbb{R}^{>0} \qquad b(\omega) = 0 \quad \forall\omega \in \mathbb{R}^{<0}$$

   Para tener continuidad en $\omega = 0$, debemos tener que $\lim_{\omega\to 0^+} a(\omega) = \lim_{\omega \to 0^-} b(\omega)$, definamos

$$c(\omega) := \begin{cases} a(\omega) & \omega \leq 0 \\ b(\omega) & \omega > 0 \end{cases}$$

   Luego, tenemos que

$$\hat{u}(\omega,y) = c(\omega)e^{-2\pi|\omega|y}$$

   Finalmente, utilizando transformada de Fourier en la condición inicial obtenemos

$$\hat{u}(\omega,0) = c(\omega) = \hat{f}(\omega)$$

□

2. Probar que $u(x,y) = (f * P_y)(x)$ soluciona la EDP anterior, donde $P_y(x) := \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{y}{x^2+y^2}$ es el *kernel de Poisson.*

Demostración. Aplicando transformada inversa de Fourier a la función $e^{-\pi|\omega|y}$ obtenemos la función $P_y(x)$, así,

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{-2\pi|\omega|y} e^{2\pi i x\omega} d\omega$$

Derivando respecto de x tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi i\omega) \hat{f}(\omega) e^{-2\pi|\omega|y} e^{2\pi i\omega x} d\omega \Longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) = -\int_{-\infty}^{+\infty} 4\pi^2\omega^2 \hat{f}(\omega) e^{-2\pi|\omega|y} e^{2\pi i\omega x} d\omega$$

De forma similar

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi|\omega|) \hat{f}(\omega) e^{-2\pi|\omega|y} e^{2\pi i\omega x} d\omega \Longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} 4\pi^2\omega^2 \hat{f}(\omega) e^{-2\pi|\omega|y} e^{2\pi i\omega x} d\omega$$

Sumando ambas expresiones tenemos que

$$\Delta u(x,y) = 0 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{>0}$$

Finalmente,

$$u(x,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i x\omega} d\omega = f(x)$$

□