Problema 1

El objetivo de este problema es entender la topología en $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{+\infty\}$, para ello recordemos lo siguiente:

Definición 1. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topologíco. Decimos que

1. X es *metrizable* si existe una función $d : X \times X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ tal que

$$1) d(x,y) = 0 \iff x = y \qquad 2) d(x,y) = d(y,x) \qquad c) d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

   y los conjuntos

$$B(x,\varepsilon) := \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}, \qquad x \in X, \varepsilon \in \mathbb{R}^{>0}$$

   forma una base de vecindades de $(X, \mathcal{T})$.

2. X es compacto si todo recubrimiento abierto tiene un subrecubrimiento finito.

Definición 2. Una *vecindad del infinito* es un anillo abierto de la forma

$$A(0; R, +\infty) := \mathbb{C} \backslash \overline{D}(0,R) \qquad \text{para } R > 0$$

Reescribiendo esto en $\overline{\mathbb{C}}$, tenemos que una vecindad del infinito es un abierto $\overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{D}(0,R)$, es decir, un conjunto que contenga a $+\infty$ y sea el complemento de un conjunto compacto. Se puede probar que esto hace a $\overline{\mathbb{C}}$ un espacio topológico y llamamos $\mathcal{T}_C$ a esa topología.

Definición 3. En $\mathbb{C} \cup \{+\infty\}$ definimos $d_C : \mathbb{C} \cup \{+\infty\} \times \mathbb{C} \cup \{+\infty\} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ por

$$d_C(z,w) := \frac{2|z-w|}{\sqrt{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}}, \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}$$
$$d_C(z,+\infty) := \frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

con $d_C(+\infty, +\infty) := 0$. Llamamos a esta la *métrica cordal.*

1. Sea $\mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_{\text{euc}} = 1\}$. Pruebe que $\varphi : (\mathbb{C} \cup \{+\infty\}, d_C) \to (\mathbb{S}^2, \|\cdot\|_{\text{euc}})$ es un homeomorfismo, donde

$$\varphi(z) := \frac{1}{1+|z|^2}\left(z + \overline{z}, -i(z-\overline{z}), |z|^2 - 1\right), \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

   y $\varphi(+\infty) := (0,0,1)$.

   Demostración. Dado $z \in \mathbb{C}$, veamos que $\varphi(z) \in \mathbb{S}^2$.

$$\begin{aligned}
\|\varphi(z)\|^2_{\text{euc}} &= \frac{1}{(1+|z|^2)^2}((z+\overline{z})^2 + (-i(z-\overline{z}))^2 + (|z|^2-1)^2) \\
&= \frac{1}{(1+|z|^2)^2}(z^2 + 2|z|^2 + \overline{z}^2 - (z^2 - 2|z|^2 + \overline{z}^2) + |z|^4 - 2|z|^2 + 1) \\
&= \frac{1}{(1+|z|^2)^2}(4|z|^2 + |z|^4 - 2|z|^2 + 1) \\
&= \frac{1}{(1+|z|^2)^2}(|z|^4 + 2|z|^2 + 1) \\
&= \frac{1}{(1+|z|^2)^2}(1+|z|^2)^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

   Para ver que es biyectiva, sea $x \in \mathbb{S}^2 \backslash \{(0,0,1)\}$ y resolvamos la ecuación $\varphi(z) = x$.

$$x_1 + ix_2 = \frac{1}{1+|z|^2}((z+\overline{z}) + (z-\overline{z})) = \frac{2z}{1+|z|^2}$$

$$1 - x_3 = 1 - \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2} = \frac{|z|^2 + 1 - |z|^2 + 1}{1 + |z|^2} = \frac{2}{1 + |z|^2}$$

Como $x \neq (0,0,1)$, $1 - x_3 \neq 0$ y por tanto

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \in \mathbb{C}$$

Por tanto φ es sobreyectiva. Notemos que si $x, y \in \mathbb{S}^2$, entonces

$$\|x - y\|_{euc}^2 = \|x\|_{euc}^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|_{euc}^2 = 2(1 - \langle x, y\rangle)$$

Luego, si $z, w \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\|\varphi(z) - \varphi(w)\|_{euc}^2 &= 2 - 2\frac{1}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}((z+\overline{z})(w+\overline{w}) - (z-\overline{z})(w-\overline{w}) + (|z|^2-1)(|w|^2-1)) \\
&= 2 - 2\frac{1}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}(z\overline{w} + \overline{z}w + z\overline{w} + \overline{z}w + |z|^2|w|^2 - |z|^2 - |w|^2 + 1) \\
&= 2 - 2\frac{1}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}(4\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |z|^2|w|^2 - |z|^2 - |w|^2 + 1) \\
&= \frac{2}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}(|z|^2|w|^2 + |z|^2 + |w|^2 + 1 - 4\mathrm{Re}(z\overline{w}) - |z|^2|w|^2 + |z|^2 + |w|^2 - 1) \\
&= \frac{4}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}(|z|^2 - 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2) \\
&= \frac{4|z-w|}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)} \\
&= d_C^2(z, w)
\end{aligned}$$

De donde deducimos que φ es inyectiva e isométrica, concluyendo que es un homeomorfismo.

$\square$

Comentarios.

a) Debido a este homeomorfismo, se conoce a $\mathbb{C} \cup \{+\infty\}$ como *esfera de Riemann* y es una *superficie de Riemann*.

b) La función φ se obtiene de proyectar la esfera sobre el plano complejo de la siguiente manera: Fijamos el punto $(0,0,1)$ y dado un punto de la esfera, se mapea a la intersección de la recta que pasa por el punto y por $(0,0,1)$ con el plano complejo, como se ve en la figura

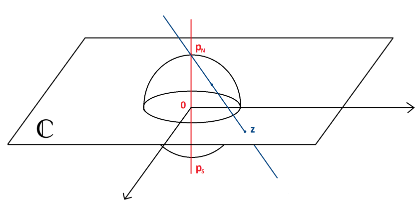


Figura 1: Proyección estereográfica

c) También se puede identificar a la esfera de Riemann con el espacio el espacio proyectivo $\mathbb{P}^1 := \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$, que consiste en el conjunto de rectas afines de $\mathbb{C}^2$. Esta identidicación es útil ya que nos permite entender los morfismos lineales en $\mathbb{P}^1$ como funciones racionales en $\mathbb{C} \cup \{+\infty\}$ llamadas *transformaciones de Möbius*.

2. Pruebe que $(\mathbb{C}\cup\{+\infty\},\mathcal{T}_C)$ es metrizable.
Indicación. *Considere la métrica cordal.*

Demostración. Consideremos la función $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\cup\{+\infty\}$ dada por $f(z)=z$. Entonces

$$d_C(f(z),f(w))=d_C(z,w)\overset{\text{def}}{=}\frac{2|z-w|}{\sqrt{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}}\le 2|z-w|,\qquad \forall z,w\in\mathbb{C}$$

Por tanto f es continua, es decir, $f^{-1}(U)=U\backslash\{+\infty\}$ es abierto para todo U en $(\mathbb{C}\cup\{+\infty\},d_C)$. Observemos que $\psi=\varphi^{-1}:(\mathbb{S}^2\backslash\{(0,0,1)\},\|\cdot\|_{\text{euc}})\to(\mathbb{C},|\cdot|)$,

$$\psi(x)=\frac{x_1+x_2i}{1-x_3}$$

es continua, luego $\psi\circ\varphi:(\mathbb{C},d_C|_{\mathbb{C}})\to(\mathbb{C},|\cdot|)$ es continua, concluyendo que las vecindades de todo punto $z\in\mathbb{C}$ coinciden en $\mathcal{T}_C$ y en la topología generada por d_C.

Por otro lado, considerando $z\in B(+\infty,R)$, tenemos que

$$\begin{aligned}d_C(z,+\infty)=\frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}}<R &\iff \frac{2}{R}<\sqrt{|z|^2+1}\\ &\iff \frac{4}{R^2}-1<|z|^2\end{aligned}$$

Notando que

$$d_C(z,+\infty)=\frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}}\le 2$$

Luego, si $R>2$, entonces $B(+\infty,R)=\mathbb{C}\cup\{+\infty\}$, por tanto basta considerar $R\le 2$. De esta forma

$$d_C(z,+\infty)<R\iff\frac{4}{R^2}-1<|z|^2\iff |z|>\sqrt{\frac{4}{R^2}-1}=:\tilde{R}$$

Es decir, $B(+\infty,R)=A(0;\tilde{R},+\infty)\cup\{+\infty\}$, de donde concluimos que $(\mathbb{C}\cup\{+\infty\},\mathcal{T}_C)\cong(\mathbb{C}\cup\{+\infty\},d_C)$. $\square$

3. Concluya que $(\mathbb{C}\cup\{+\infty\},\mathcal{T}_C)$ es un espacio métrico compacto.

Demostración. En 2 probamos que $(\mathbb{C}\cup\{+\infty\},\mathcal{T}_C)$ es metrizable y $(\mathbb{C}\cup\{+\infty\},\mathcal{T}_C)\cong(\mathbb{C}\cup\{+\infty\},d_C)$. Finalmente, notando que $(\mathbb{S}^2,\|\cdot\|_{\text{euc}})$ es compacto y $(\mathbb{S}^2,\|\cdot\|_{\text{euc}})\cong(\mathbb{C}\cup\{+\infty\},d_C)$ podemos concluir que $(\mathbb{C}\cup\{+\infty\},\mathcal{T}_C)\cong(\mathbb{S}^2,\|\cdot\|_{\text{euc}})$ y por tanto es compacto. $\square$

Comentario. Es general, agregar $\{+\infty\}$ a un espacio topológico se conoce como *compactificación por un punto* y, por ejemplo en $\mathbb{R}$, se obtiene que $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cong\partial\mathbb{D}$ es una circunferecia.

Problema 2

Pruebe que toda función meromorfa en $\mathbb{C}\cup\{+\infty\}$ es una función racional.

Demostración. Sea $f\in\mathfrak{M}(\mathbb{C}\cup\{+\infty\})$, entonces f debe tener una singularidad removible o un polo en $z=+\infty$.

Si f tiene una singularidad removible en $+\infty$, entonces $f(1/z)$ tiene una singularidad removible en $z=0$, es decir, existe $R>0$ y $F\in\mathcal{O}(\overline{D}(0,R))$ tal que $F(z)=f(1/z)$ para todo $z\in\overline{D}(0,R)\backslash\{0\}$, es decir $F(1/z)=f(z)$ es holomorfa en $A(0;R,+\infty)$ y por tanto f tiene finitos polos. Además, si f tiene una cantidad infinita de ceros, como $\mathbb{C}\cup\{+\infty\}$ es compacto, f tiene un cero z^* que es punto de acumulación. Si el punto de acumulación es un punto $z^*\in\mathbb{C}$, entonces f es la función nula. En caso contrario, existe una sucesión de ceros tal que $z_n\to+\infty$.

Consideremos $w_n = 1/z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y eliminando términos de ser necesario para que $w_n \in \overline{D}(0, R)$, tenemos que

$$F(w_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow F(0) = 0 \quad \text{por continuidad}$$

concluyendo que F tiene un cero que es un punto de acumulación y por tanto F es una función nula. De esta forma, f debe tener finitos ceros.

Si f tiene un polo en $+\infty$, entonces $f(1/z)$ tiene un polo en cero y por tanto existe $g \in \mathcal{O}(\overline{D}(0, R))$ tal que

$$f(1/w) = F(w) = wg(w), \qquad \forall w \in \overline{D}(0, R)$$

Si $z = 1/w$, entonces

$$f(z) = \frac{1}{z}g(1/z), \qquad \forall z \in A(0; R, +\infty)$$

De esta forma, f tiene todos sus polos (distintos a $+\infty$) en $\overline{D}(0, R)$ y por tanto sus polos son finitos. Además, como f tiene un polo en $+\infty$

$$\lim_{z \to 0} f(1/z) = +\infty \Longrightarrow \lim_{|z| \to +\infty} |f(z)| = +\infty$$

Es decir, existe $R > 0$ tal que $|f(z)| > 1$ para todo $z \in A(0; R, +\infty)$. Así, f tiene finitos ceros.

En cualquiera de los casos anteriores, f tiene finitos ceros y finitos polos. Sean $\{p_1, \ldots, p_d\}$ los polos de f, entonces $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\backslash\{p_1, \ldots, p_d\})$. Luego, existe $p(z) = \prod_{j=1}^{N}(z - z_j)$ polinomio y una función holomorfa $g \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C}\backslash\{p_1, \ldots, p_d\})$ tal que

$$f(z) = p(z)g(z), \qquad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{p_1, \ldots, p_d\}$$

Como p no tiene polos, g tiene polos en $p_1, \ldots, p_d$. Como g no se anula, $1/g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Como $1/g$ es holomorfa, existe $h \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C})$ tal que

$$\frac{1}{g} = qh, \qquad q(z) = \prod_{k=1}^{d}(z - p_k)$$

luego tenemos que $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)h(z)}$. Si f tiene una singularidad removible en $+\infty$,

$$\lim_{|z| \to +\infty} \left|\frac{p(z)}{q(z)h(z)}\right| = \lim_{|z| \to +\infty} |f(z)| = \lim_{z \to 0} |f(1/z)| \in \mathbb{C}$$

Si f tiene un polo en $+\infty$,

$$\lim_{|z| \to +\infty} \left|\frac{p(z)}{q(z)h(z)}\right| = \lim_{|z| \to +\infty} |f(z)| = \lim_{z \to 0} |f(1/z)| = +\infty$$

En cualquiera de los casos anteriores tenemos que h crece de manera polinomial, pero h no tiene ceros, por tanto h es constante, concluyendo que f es una función racional.

$\square$

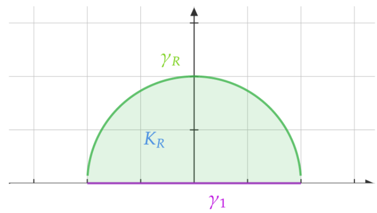
Problema 3

Use integración de contorno para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{(1 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2}(1 + 2\pi|\xi|)e^{-2\pi|\xi|}$$

Solución. Para $\xi < 0$, consideremos el compacto

$$K_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R,\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$$



Para $R > 1$, K_R tiene un polo ($z_0 = i$) de $f(z) = \dfrac{e^{-2\pi i z\xi}}{(1+z^2)^2}$. Calculando el residuo de f tenemos

$$\begin{aligned}
\text{Res}(f,i) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2\frac{e^{-2\pi i z\xi}}{(1+z^2)^2}\right] &= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{-2\pi i z\xi}}{(z+i)^2}\right]\\
&= \lim_{z\to i}\frac{-2\pi i\xi e^{-2\pi i z\xi}(z+i)^2 - 2(z+i)e^{-2\pi i z\xi}}{(z+i)^4}\\
&= \frac{-2\pi i(-4)\xi e^{2\pi\xi} - 2(2i)e^{2\pi\xi}}{(2i)^4}\\
&= -\frac{i}{4}e^{2\pi\xi}(1-2\pi\xi)
\end{aligned}$$

Para γ_R, consideremos $z(t) = Re^{it}$, luego $z'(t) = Rie^{it}$, con $t \in [0,\pi]$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
|I_1| = \left|\int_{\gamma_R}\frac{e^{-2\pi i z\xi}}{(1+z^2)^2}dz\right| &= \left|\int_0^\pi \frac{e^{-2\pi i\xi R\exp(it)}}{(1+R^2e^{2it})}Rie^{it}dt\right|\\
&\leq \int_0^\pi \frac{e^{2\pi\xi R\sin(t)}}{|1+R^2e^{2it}|^2}Rdt\\
&= \int_0^\pi \frac{e^{2\pi\xi R\sin(t)}}{1+2R^2e^{-2\sin(t)}+R^4e^{-4\sin(t)}}Rdt
\end{aligned}$$

Como $\xi < 0$, $e^{2\pi\xi R\sin(t)} \to 0$ cuando $R \to +\infty$, por tanto $I_1 \to 0$. Por otro lado,

$$I_2 = \int_{\gamma_1}\frac{e^{-2\pi i z\xi}}{(1+z^2)^2}dz = \int_{-R}^{R}\frac{e^{-2\pi i x\xi}}{(1+x^2)^2}dx \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-2\pi i x\xi}}{(1+x^2)^2}dx$$

Por el teorema del residuo, para $R > 1$

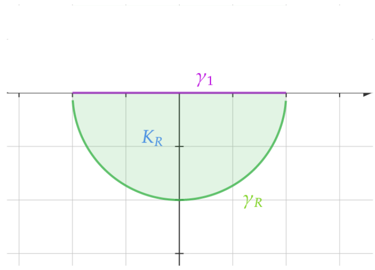
$$\int_{\partial K_R}\frac{e^{-2\pi i z\xi}}{(1+z^2)^2}dz = 2\pi i\text{Res}(f,i) = 2\pi i\left(-\frac{i}{4}e^{2\pi\xi}(1-2\pi\xi)\right) = \frac{\pi}{2}e^{2\pi\xi}(1-2\pi\xi)$$

Finalmente, tomando límite cuando $R \to +\infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-2\pi i x\xi}}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{2\pi\xi}(1-2\pi\xi) = \frac{\pi}{2}e^{-2\pi(-\xi)}(1+2\pi(-\xi)) \qquad \forall\xi\in\mathbb{R}^{\leq 0}$$

Para $\xi > 0$ procedemos de forma análoga, consideremos

$$\{z\in\mathbb{C} : |z| \leq R,\ \text{Im}(z) \leq 0\}$$



Nuevamente, para $R > 1$, tenemos un solo polo $-i \in K_R$, luego, si calculamos el residuo tenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, -i) = \lim_{z \to -i} \frac{d}{dz}\left[(z+i)^2 \frac{e^{-2\pi i z\xi}}{(1+z^2)^2}\right] &= \lim_{z\to -i} \frac{d}{dz}\left[\frac{e^{-2\pi z\xi}}{(z-i)^2}\right] \\ &= \lim_{z\to -i} \frac{-2\pi i\xi e^{-2\pi i z\xi}(z-i)^2 - 2(z-i)e^{-2\pi i z\xi}}{(z-i)^4} \\ &= \frac{-2\pi i(-4)\xi e^{-2\pi\xi} - 2(-2i)e^{-2\pi\xi}}{(-2i)^4} \\ &= \frac{i}{4}e^{-2\pi\xi}(1+2\pi\xi)\end{aligned}$$

Tenemos que

$$\int_{\partial K_R} \frac{e^{-2\pi i z\xi}}{(1+z^2)^2}dz = \underbrace{\int_{\gamma_1} \frac{e^{-2\pi i z\xi}}{(1+z^2)^2}dz}_{=I_1} + \underbrace{\int_{\gamma_R} \frac{e^{-2\pi i z\xi}}{(1+z^2)^2}}_{=I_2}$$

Por el Teorema del Residuo, si $R > 1$

$$\int_{\partial K_R} \frac{e^{-2\pi i z\xi}}{(1+z^2)^2}dz = 2\pi i\left(\frac{i}{4}e^{-2\pi\xi}(1+2\pi\xi)\right) = -\frac{\pi}{2}e^{-2\pi\xi}(1+2\pi\xi), \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^{\geq 0}$$

De forma análoga a lo anterior, $I_2 \to 0$ y $z(x) = -x$, con $x \in [-R, R]$, luego

$$I_1 = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{(1+x^2)^2}dx \xrightarrow{R\to+\infty} -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{(1+x^2)^2}dx$$

Tomando el límite $R \to +\infty$ tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-2\pi\xi}(1+2\pi\xi), \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^{\geq 0}$$

De donde concluimos

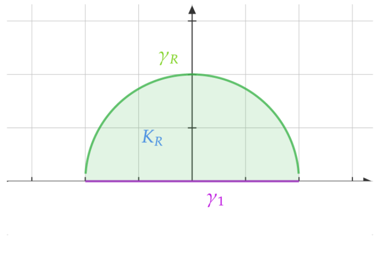
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-2\pi|\xi|}(1+2\pi|\xi|), \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

Problema 4

Sea Q un polinomio de grado $\operatorname{gr}(Q) \geq 2$ con raíces distintas contenidas en $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{Q(x)}dx$$

en términos de las raíces de Q.



Solución. La función $z \mapsto \dfrac{e^{-2\pi ixz}}{Q(z)}$ tiene polos (simples) en los ceros $z_1, \dots, z_n$ de Q, luego

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi ixz}}{Q(z)}, z_j\right) = \frac{e^{-2\pi iz_j\xi}}{Q'(z_j)}$$

Para $\xi \leq 0$ consideremos el compacto K_R como en el Problema 3. Para γ_R, consideramos la parametrización $z(t) = Re^{it}$, luego

$$\begin{aligned}|I_2| = \left|\int_{\gamma_R} \frac{e^{-2\pi iz\xi}}{Q(z)} dz\right| &= \left|\int_0^\pi \frac{e^{-2\pi i\xi R\exp(it)}}{Q(R\exp(it))} iRe^{it} dt\right| \\ &\leq \int_0^\pi \frac{e^{2\pi\xi R\sin(t)}}{|Q(R\exp(it))|} Rdt\end{aligned}$$

Como $\xi \leq 0$, $e^{2\pi\xi R\sin(t)} \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ o bien es 1, y como Q es un polinomio, $|Q(R\exp(it))| \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, de donde concluimos que $|I_2| \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Por otro lado,

$$I_1 = \int_{\gamma_1} \frac{e^{2\pi iz\xi}}{Q(z)} dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{2\pi ix\xi}}{Q(x)} dx$$

Además, para $R > \text{máx}\{|z| : z \in V(Q)\}$ tenemos

$$I_1 + I_2 = \int_{K_R} \frac{e^{2\pi iz\xi}}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{\substack{z\in V(Q)\\ \operatorname{Im}(z)>0}} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi ixz}}{Q(z)}, z_j\right) = 2\pi i \sum_{\substack{z\in V(Q)\\ \operatorname{Im}(z)>0}} \frac{e^{-2\pi iz_j\xi}}{Q'(z_j)}$$

Tomando el límite cuando $R \to +\infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi ix\xi}}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\substack{z\in V(Q)\\ \operatorname{Im}(z)>0}} \frac{e^{-2\pi iz_j\xi}}{Q'(z_j)}, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^{\leq 0}$$

De forma análoga, para $\xi > 0$, considerando el compacto K_R dado por Observamos que $I_2 \to 0$, y que γ_1 se puede parametrizar por $z(t) = -t$, con $t \in [-R, R]$, luego, tomando el límite cuando $R \to +\infty$

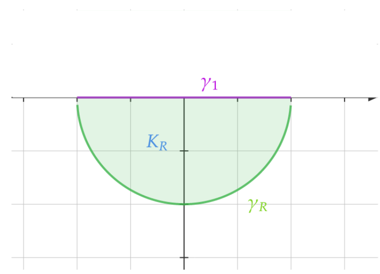
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi ix\xi}}{Q(x)} dx = -2\pi i \sum_{\substack{z\in V(Q)\\ \operatorname{Im}(z)<0}} \frac{e^{-2\pi iz_j\xi}}{Q'(z_j)}, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^{>0}$$

En particular, si $Q(x) = x^2 + 1$, tenemos que $V(Q) = \{-i, i\}$. De esta forma, si $\xi \leq 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi ix\xi}}{x^2+1} dx = 2\pi i \frac{e^{-2\pi i(i)\xi}}{Q'(i)} = 2\pi i \frac{e^{-2\pi(-\xi)}}{2i} = \pi e^{-2\pi(-\xi)} \qquad \forall \xi \leq 0$$

Para $\xi > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi ix\xi}}{x^2+1} dx = -2\pi i \frac{e^{-2\pi i(-i)\xi}}{Q'(i)} = -2\pi i \frac{e^{-2\pi\xi}}{-2i} = \pi e^{-2\pi\xi} \qquad \forall \xi > 0$$



Juntando lo anterior,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{x^2+1}dx = \pi e^{-2\pi|\xi|}, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}$$