Problema 1

Encuentre todos los desarrollos de

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{3-z}$$

en series de Laurent en torno a $z = 0$.

Indicación. *Considerar los abiertos* $\mathbb{D}, A(0;1,3)$ *y* $A(0;3,+\infty)$.

Solución. Recordemos que

$$\sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}, \qquad \forall z \in \mathbb{D}$$

Para el primer término, notamos que

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{n\geq 1} n z^{n-1}$$

Mientras que si $|z| > 1$, tenemos que $|z^{-1}| < 1$ y por tanto

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{(1-z^{-1})^2}\right) = \frac{1}{z^2}\sum_{n\geq 1} n\left(\frac{1}{z}\right)^{n-1} = \sum_{n\geq 1}\frac{n}{z^{n+1}}$$

Para el segundo término tenemos que

$$\frac{1}{3-z} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-z/3}\right) = \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{3^{n+1}}$$

Lo anterior es válido cuando $|z/3| < 1$, es decir, en $D(0,3)$. Fuera de este disco, si $|z| > 3$

$$\frac{1}{3-z} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{3z^{-1}-1}\right) = -\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-3z^{-1}}\right) = -\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{3}{z}\right)^n = -\sum_{n\geq 0}\frac{3^n}{z^{n+1}}$$

Finalmente, concluimos que para $z \in \mathbb{D}$

$$f(z) = \sum_{n\geq 1} n z^{n-1} + \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{3^{n+1}}$$

En el anillo $A(0;1,3)$

$$f(z) = \sum_{n\geq 1}\frac{n}{z^{n+1}} + \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{3^{n+1}}$$

y en el anillo $A(0;3,+\infty)$ tenemos

$$f(z) = \sum_{n\geq 1}\frac{n}{z^{n+1}} - \sum_{n\geq 0}\frac{3^n}{z^{n+1}}$$

Problema 2

Determinar si las siguientes funciones poseen singularidades removibles en $z_0 = 0$.

1. $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z}$

   Solución. Notemos que f es holomorfa en $\mathbb{C}^* \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C}\backslash\{0\}$, por tanto podemos calcular los coeficientes de la serie de Laurent

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{\sin(z)/z}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{\sin(z)}{z^{n+2}}dz = 0 \qquad \forall n \geq -2$$

pues si $n \geq -2$, se tiene que $n+2 \geq 0$ y entonces la función $\sin(z)/z^{n+2}$ es holomorfa. Nos basta determinar si a_{-1} es cero. Por la fórmula integral de Cauchy

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K} \frac{\sin(z)}{z} dz = \sin(0) = 0$$

De donde concluimos que f tiene una singularidad removible en $z_0 = 0$.

De forma alternativa, sabemos que $\sin(z)$ es una función entera y

$$\sin(z) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \Longrightarrow f(z) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} \qquad \forall z \in \mathbb{C}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

De donde la función

$$g(z) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$$

es entera y extiende a f, por tanto f tiene una singularidad removible en $z_0 = 0$.

2. $g(z) = \dfrac{\sin(z)}{z^2}$.

   Solución. Notemos que

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$$

   En particular, existe $R > 0$ tal que

$$z \in D(0,R) \Longrightarrow |\sin(z)| \leq |z|$$

   De esta forma que $\sin(z)/z$ está acotada para z en $D(0,R)$, por tanto

$$\lim_{|z|\to 0}\left|\frac{\sin(z)}{z^2}\right| = +\infty$$

   Por tanto $z_0 = 0$ es una singularidad no removible de g. Es más, notemos que para $z \in \mathbb{C}^*$ tenemos

$$\sin(z) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \Longrightarrow g(z) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!}$$

   En particular, g es holomorfa en $\mathbb{C}^*$, $a_n = 0$ para todo $n < -1$ y

$$\mathrm{Res}(g,0) = a_{-1} = 1$$

   Por tanto g tiene un polo (simple!) en $z_0 = 0$.

Problema 3

Demuestre el principio del argumento

Teorema 1. *(Principio del argumento) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo no vacío y $f \in \mathfrak{M}(\Omega)$ una función meromorfa. Si $K \subseteq \Omega$ es compacto de frontera $\mathscr{C}^1$ por pedazos tal que f no tinen ni ceros ni polos en ∂K. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K} \frac{f'}{f} dz = N - P$$

donde N es el número de ceros de f y P el número de polos (contando multiplicidad).

Para ello, proceda de la siguiente forma:

1. Pruebe que existen $p, q \in \mathbb{C}[z]$ y $g \in \mathcal{O}^*(\Omega)$ tales que $f = pq^{-1}g$.

Demostración. Como K es compacto, $N, P \in \mathbb{N}$. Como $f \in \mathfrak{M}(\Omega)$ y Ω es conexo, existen $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(\Omega)$ tales que $f = f_1/f_2$. De esta forma, si $z_1, \ldots, z_d$ son los ceros de f (y por tanto de f_1), entonces existe $g_1 \in \mathcal{O}^*(\Omega)$ tal que

$$f_1(z) = g_1(z) \prod_{j=1}^{d} (z - z_j)^{n_j}$$

donde n_j es el orden del cero z_j. De manera análoga, si $p_1, \ldots, p_r$ son los polos de f (y por tanto los ceros de f_2), existe $g_2 \in \mathcal{O}^*(\Omega)$ tal que

$$f_2(z) = g_2(z) \prod_{j=1}^{r} (z - p_j)^{m_j}$$

con m_j el orden del polo p_j. Finalmente, definiendo $p(z) = \prod_{j=1}^{d}(z - z_j)^{n_j}$, $q(z) = \prod_{j=1}^{r}(z - p_j)^{m_j}$ y $g = g_1/g_2 \in \mathcal{O}^*(\Omega)$ concluimos que $f = pq^{-1}g$.

□

2. Muestre que

$$\frac{f'}{f} = \frac{p'}{p} - \frac{q'}{q} + \frac{g'}{g}$$

donde p, q, g son los dados por el ítem anterior.

Demostración. Utilizando la expresión del ítem anterior,

$$f' = p'(q^{-1}g) + p(q^{-1}g)' = p'(q^{-1}g) + p(q^{-1})'g + pq^{-1}g'$$
$$\Longrightarrow \frac{f'}{f} = \frac{p'}{p} + \frac{(q^{-1})'}{q^{-1}} + \frac{g'}{g}$$

Notemos que para el término con q tenemos

$$(q^{-1})' = (1/q)' = -\frac{q'}{q^2} \Longrightarrow \frac{(q^{-1})'}{q^{-1}} = -\frac{q'}{q}$$

Concluimos que

$$\frac{f'}{f} = \frac{p'}{p} - \frac{q'}{q} + \frac{g'}{g}$$

□

3. Concluya el resultado usando que si $h \in \mathcal{O}(\Omega)$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{h'}{h} dz = \text{número de ceros de } h$$

Demostración. Finalmente, utilizando el ítem anterior, tenemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f'}{f} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{p'}{p} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{q'}{q} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{g'}{g} dz$$

Como $g \in \mathcal{O}^*(\Omega)$, tenemos que $g'/g \in \mathcal{O}(\Omega)$, luego, por el Teorema de Goursat

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{g'}{g} dz = 0$$

Por otro lado, $p, q \in \mathcal{O}(\Omega)$ pues son polinomios, los ceros de p son los ceros de f y los ceros de q son los polos de f, por tanto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{p'}{p} dz = N \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{q'}{q} dz = P$$

Concluyendo que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f'}{f} dz = N - P$$

□

Problema 4

Calcule el residuo de la función $\dfrac{1}{\sin(\pi z)}$ en $z = n \in \mathbb{Z}$.

Solución. Los ceros de $g(z) = \sin(\pi z)$ son exactamente los enteros, y $g'(z) = \pi\cos(\pi z)$, luego $g'(n) = \pi\cos(\pi n) \neq 0$, por lo tanto todos sus ceros son de orden 1. Sea $f(z) = 1/\sin(\pi z)$ y $n \in \mathbb{Z}$. Entonces, f tiene un polo simple en $z_0 = n$ y por tanto

$$\operatorname{Res}(f, n) = \lim_{z\to n}(z-n)\frac{1}{\sin(\pi z)}$$

Utilizando la fórmula de la suma de ángulos, obtenemos

$$\sin(\pi z) = \sin(\pi(z-n) + n\pi) = \sin(\pi(z-n))\cos(n\pi) + \cancel{\sin(\pi z)}^{0}\cos(\pi(z-n))$$

Para $n = 0$, $\cos(n\pi) = \cos(0) = 1$, para $n = 1$ tenemos $\cos(n\pi) = \cos(\pi) = -1$. Como cos es periódica, concluimos que $\cos(n\pi) = (-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, n) = \lim_{z\to n}(z-n)\frac{1}{\sin(\pi z)} &= \lim_{z\to n}(z-n)\frac{1}{(-1)^n\sin(\pi(n-z))} \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi}\lim_{z\to n}\frac{\pi(z-n)}{\sin(\pi(z-n))} \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi}
\end{aligned}$$

$$\implies \operatorname{Res}(f, n) = \frac{(-1)^n}{\pi}$$

Problema 5

Sea Ω abierto tal que $0 \in \Omega$, $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ con $g(0) \neq 0$ y definamos $f(z) = zg(z)$. Calcule $\operatorname{Res}(1/f, 0)$ y $\operatorname{Res}(1/f^2, 0)$.

Solución. Como $g(0) \neq 0$, $1/f$ debe tener un polo simple en $z_0 = 0$, luego

$$\operatorname{Res}(1/f, 0) = \lim_{z\to 0}\frac{z}{f} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g(0)}$$

De forma similar, $1/f^2$ tiene un polo doble en $z_0 = 0$ y por tanto

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{f^2}, 0\right) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{f^2(z)}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{g^2(z)}\right) = -2\frac{g'(0)}{g^3(0)}$$

Problema 6

Calcule las siguientes integrales

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx$

   Solución. La función meromorfa $f(z) = \dfrac{1}{1+z^4}$ tiene polos (simples) en $e^{i\pi/4}, e^{3\pi i/4}, e^{5\pi i/4}, e^{7\pi i/4}$. Los polos con parte imaginaria positiva son

   $$e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \qquad \text{y} \qquad e^{3i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$$

   Calculemos los residuos

   $$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, e^{i\pi/4}\right) = \frac{1}{4(e^{i\pi/4})^3} = \frac{1}{4e^{3i\pi/4}} = \frac{\sqrt{2}}{4(-1+i)}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, e^{3i\pi/4}\right) = \frac{1}{4(e^{3i\pi/4})^3} = \frac{1}{4e^{9i\pi/4}} = \frac{\sqrt{2}}{4(1+i)}$$

$$\implies \sum_{\operatorname{Im}(a_n)>0} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, a_n\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{(-1+i)} + \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{(1+i)} = -\frac{\sqrt{2}}{4}i$$

Concluyendo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}dx = 2\pi i \cdot -\frac{\sqrt{2}}{4}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

2. $\displaystyle\int_{\partial D(0,2)} \tan(z)dz$

Solución. Recordemos que $\tan(z) := \sin(z)/\cos(z)$, luego tiene polos simples en $z = \pi/2$ y $z = -\pi/2$, por el Teorema de Residuos

$$\int_{\partial D(0,2)} \tan(z)dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(\tan(z), \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{Res}\left(\tan(z), -\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Para calcular los residuos, recordamos que si $f = u/v$ tiene un polo simple en z_0, entonces $\operatorname{Res}(f, z_0) = u(z_0)/v'(z_0)$, por tanto

$$\operatorname{Res}\left(\tan(z), \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(\pi/2)}{-\sin(\pi/2)} = -1$$

$$\operatorname{Res}\left(\tan(z), -\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(-\pi/2)}{-\sin(-\pi/2)} = -1$$

Concluyendo que

$$\int_{\partial D(0,2)} \tan(z)dz = 2\pi i(-1-1) = -4\pi i$$

3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\cos(\theta)}d\theta$, con $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a > |b|$.

Solución. Consideremos el cambio de variable $z = e^{i\theta}$, luego $dz = izd\theta$ y por tanto $d\theta = -\frac{i}{z}dz$. Por la identidad de Euler, $\cos(z) = \frac{z + z^{-1}}{2}$, luego

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\cos(\theta)}d\theta &= -i\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{a + b(z+z^{-1})/2}\frac{1}{z}dz \\ &= -2i\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{bz^2 + 2az + b}dz\end{aligned}$$

Tenemos que los polos del integrando satisfacen

$$bz^2 + 2az + b = 0 \implies z = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4b^2}}{2b} = \frac{-2a \pm \sqrt{4(a^2 - b^2)}}{2b} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

Notemos que como $a > |b|$, entonces las raíces son reales y distintas, además

$$\begin{aligned}|z_+| = \left|\frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right| &= \left|\frac{(-a + \sqrt{a^2 - b^2})(a + \sqrt{a^2 - b^2})}{b(a + \sqrt{a^2 - b^2})}\right| \\ &= \left|\frac{a^2 - b^2 - a^2}{b(a + \sqrt{a^2 - b^2})}\right| \\ &= \frac{|b|}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} < 1 \\ &\implies |z_+| < 1\end{aligned}$$

Sin embargo,

$$|z_-| = \left|\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right| = \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{|b|} > 1$$

Por tanto, solo $z_+ \in \mathbb{D}$ es un polo (simple) del integrando. Si calculamos el residuo, llamando f al integrando tenemos

$$\operatorname{Res}(f, z_+) = \lim_{z\to z_+} \cancel{(z-z_+)}\frac{1}{b\cancel{(z-z_+)}(z-z_-)} = \frac{1}{b(z_+-z_-)} = \frac{1}{b}\frac{b}{2\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}$$

Por el Teorema del Residuo

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1}{bz^2+2az+b}dz = \cancel{2}\pi i\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$\implies \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\cos(\theta)}d\theta = -2i\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1}{bz^2+2az+b}dz = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$