Problema 1

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto. Para $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ definimos

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x+yi)|^2 dxdy \right)^{1/2} = \left(\frac{i}{2} \int_\Omega |f(z,\overline{z})|^2 dz d\overline{z} \right)^{1/2}$$

1. Pruebe que si f es holomorfa en un disco $D(z_0, R)$, entonces para todo $s \in]0, R[$ existe una constante $C > 0$ (que puede depender de s y R) tal que

$$p_K(f) \leq C\|f\|_{L^2(D(z_0,R))}$$

donde $K = \overline{D}(z_0, s)$.

Demostración. Si g es holomorfa en $D(z_0, R)$, para $0 < r \leq d < R$, por la ayudantía 3, tenemos que para todo $z \in \overline{D}(z_0, d)$

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z + re^{it}) dt$$

Multiplicando por r e integrando sobre r de 0 a d tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{2} g(z) = \int_0^d g(z) r dr &= \frac{1}{2\pi} \int_0^d \int_0^{2\pi} g(z + de^{it}) r dt dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{D(z_0,d)} g(w) dxdy \end{aligned}$$

Luego

$$|g(z)| \leq \frac{1}{d^2\pi} \int_{D(z_0,d)} |g(w)| dxdy, \quad \forall z \in D(z_0, d)$$

En particular, como f^2 es holomorfa, tomando raíz cuadrada a la expresión anterior tenemos

$$|f(z)| \leq \left(\frac{1}{d^2\pi} \int_{D(z_0,s)} |f|^2 dxdy \right)^{1/2} = \frac{1}{d\sqrt{\pi}} \|f\|_{L^2(D(z_0,d))}$$

Tomando $d = R - s$ tenemos

$$|f(z)| \leq \frac{1}{(R-s)\sqrt{\pi}} \|f\|_{L^2(D(z_0,d))} \leq \frac{1}{(R-s)\sqrt{\pi}} \|f\|_{L^2(D(z_0,R))}$$

Finalmente, si $C = \frac{1}{(R-s)\sqrt{\pi}} > 0$, tomando supremo sobre K concluimos

$$p_K(f) \leq C\|f\|_{L^2(D(z_0,R))}$$

□

2. Muestre que $\text{dist}(K, \Omega^c) > 0$, donde

$$\text{dist}(K, \Omega^c) := \inf\{|z - w| : z \in K, w \in \Omega^c\}$$

Demostración. Supongamos que $\text{dist}(K, \Omega^c) = 0$, entonces existe $\{(z_k, w_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq K \times \Omega^c$ tal que

$$|z_k - w_k| \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Como K es compacto, existe $\{z_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ y $\overline{z} \in K$ tal que $z_{k_j} \to \overline{z}$. De esta forma, por la desigualdad triangular

$$|\overline{z} - w_{k_j}| \leq |\overline{z} - z_{k_j}| + |z_{k_j} - w_{k_j}| \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Es decir, encontramos una sucesión $\{w_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega^c$ tal que $w_{k_j} \to \overline{z}$, y por tanto $\overline{z} \in \overline{\Omega^c}$. Como Ω es abierto, tenemos que $\overline{z} \in \Omega^c$, lo que es una contradicción.

□

3. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω tal que es de Cauchy para la norma $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, es decir, para todo $\varepsilon>0$ existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\|f_n-f_m\|<\varepsilon$ para todo $n,m\geq n_0$. Pruebe que existe $f\in\mathcal{O}(\Omega)$ tal que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniforme sobre compactos a f.

   Demostración. Sea $K\subseteq\Omega$ compacto y sea $0<d<\operatorname{dist}(K,\Omega^c)$, entonces para todo $z\in K$, $\overline{D}(z,d)\subseteq\Omega$ y por tanto, por lo anterior

$$|g(w)|\leq\frac{1}{d\sqrt{\pi}}\|g\|_{L^2(D(z_0,d))}\leq\frac{1}{d\sqrt{\pi}}\|g\|_{L^2(\Omega)},\qquad\forall w\in D(z,r)$$

   con $r<d$. Notemos que $K\subseteq\bigcup_{z\in K}D(z,r)$, por lo que tomando supremo sobre $w\in K$ obtenemos

$$p_K(g)\leq\frac{1}{d\sqrt{\pi}}\|g\|_{L^2(\Omega)}$$

   para todo compacto $K\subseteq\Omega$ y toda función holomorfa $g\in\mathcal{O}(\Omega)$, en particular, como $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy para $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, dado $\varepsilon>0$ existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$p_K(f_n-f_m)\leq\frac{1}{d\sqrt{\pi}}\|f_n-f_m\|_{L^2(\Omega)}<\varepsilon,\qquad\forall m,n\geq n_0$$

   Es decir, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Fréchet $(\mathcal{O}(\Omega),\{p_K\}_{K\subseteq\Omega})$ y por tanto existe f holomorfa tal que $f_n\to f$ uniforme sobre compactos.

   □

Problema 2

Sea $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ abierto, convexo[1] y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas tal que la sucesión de sus partes reales $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniforme sobre compactos en Ω a una función $u\in\mathscr{C}^1(\Omega)$. Pruebe que si existe $z_0\in\Omega$ tal que $f_n(z_0)\to w_0\in\mathbb{C}$, entonces $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniforme sobre compactos.

Demostración. Por la ayudantía 4, para $z\in\Omega$, $d>0$ tal que $\overline{D}(z,d)\subseteq\Omega$, tenemos que para todo $0<r\leq d$

$$u_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_n(z+re^{it})dt$$

Como $u_n\to u$ uniformemente sobre compactos, en particular converge uniformemente sobre $\overline{D}(z,r)$ y por tanto, tomando límite tenemos

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z+re^{it})dt$$

Así, derivando bajo el signo de integral tenemos

$$\frac{\partial u_n(z)}{\partial x_j}-\frac{\partial u(z)}{\partial x_j}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j}-\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)(z+re^{it})dt$$

$$\begin{aligned}\implies\frac{d^2}{2}\left(\frac{\partial u_n(z)}{\partial x_j}-\frac{\partial u(z)}{\partial x_j}\right)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^d\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j}-\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)(z+re^{it})rdtdr\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{B(z,d)}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j}-\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)(x+yi)dxdy\end{aligned}$$

Por el teorema de la divergencia, denotando v^j el vector normal a $\partial D(z,d)$

$$\int_{B(z,d)}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j}-\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)(x+yi)dxdy=\int_{\partial D(z,d)}(u_n-u)v^jdS$$

[1] i.e. para todo $x,y\in\Omega$ y $t\in[0,1]$ se tiene que $tx+(1-t)y\in\Omega$.

$$\implies \frac{\partial u_n(z)}{\partial x_j} - \frac{\partial u(z)}{\partial x_j} = \frac{1}{\pi d^2}\int_{\partial D(z,d)} (u_n - u)v^j dS$$

$$\begin{aligned}\implies \left|\frac{\partial u_n(z)}{\partial x_j} - \frac{\partial u(z)}{\partial x_j}\right| &\leq \frac{1}{\pi d^2}\left|\int_{\partial D(z,d)} (u_n - u)v^j dS\right| \\ &\leq \frac{2\pi d}{\pi d^2}\sup_{\partial D(z,d)} |u_n - u| \\ &\leq \frac{2}{d}\sup_{\overline{D}(z,d)} |u_n - u|\end{aligned}$$

Utilizando la construcción del problema anterior, tenemos que para cada compacto K

$$p_K\left(\frac{\partial u_n(z)}{\partial x_j} - \frac{\partial u(z)}{\partial x_j}\right) \leq \frac{2}{d}p_K(u_n - u)$$

Como $p_K(u_n - u) \to 0$, tenemos que las derivadas parciales convergen uniforme sobre compactos, y por lo tanto $\nabla u_n \to \nabla u$ uniforme sobre compacto. Recordando que $|f_n'| = \|\nabla u_n\|_{euc}$ tenemos

$$|f_n' - f_m'| = \|\nabla u_n - \nabla u_m\|_{euc} \to 0 \text{ uniforme sobre compactos}$$

Como $(\mathcal{O}(\Omega), \{p_K\}_{K\subseteq\Omega})$ es un espacio de Fréchet, existe $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $f_n' \to g$ uniforme sobre compactos. Finalmente, para cada $z \in \Omega$ sea $\gamma \subseteq \Omega$ el segmento de recta que une z_0 y z, luego, como $f_n' \to g$ unifome sobre compactos, en particular

$$\left|\int_{\gamma_z} f_n'(w) - g(w)dw\right| \leq \ell(\gamma_z)\sup_{\gamma_z}|f_n' - g| \leq C\sup_K |f_n' - g| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

sobre cada compacto K, donde $C = \sup_{z\in K}\ell(\gamma_z) = \sup_K |z - z_0| < +\infty$. Notando que

$$\int_{\gamma_z} f_n'(w)dw = f_n(z) - f_n(z_0)$$

De donde obtenemos que

$$\begin{aligned}\left|f_n(z) - \left(w_0 + \int_{\gamma_z} g(w)dw\right)\right| &= \left|f_n(z) - f_n(z_0) - \int_{\gamma_z} g(w)dw + f_n(z_0) - w_0\right| \\ &\leq \left|f_n(z) - f_n(z) - \int_{\gamma_z} g(w)dw\right| + |f_n(z_0) - w_0| \\ &= \left|\int_{\gamma_z}(f_n'(w) - g(w))dw\right| + |f_n(z_0) - w_0|\end{aligned}$$

Concluyendo que $f_n \to \int_{\gamma_z} g(w)dw + w_0$ uniforme sobre compactos.

□

Problema 3

Probar, usando que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, que para todos $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$

1. $B(x,y) = B(x+1,y) + B(x,y+1)$.

Demostración. Por definición tenemos

$$\begin{aligned}B(x+1,y) + B(x,y+1) &= \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+1)} + \frac{\Gamma(x)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+1)} \\ &= \frac{x\Gamma(x)\Gamma(y)}{(x+y)\Gamma(x+y)} + \frac{y\Gamma(x)\Gamma(y)}{(x+y)\Gamma(x+y)} \\ &= \frac{\cancel{x+y}}{\cancel{x+y}}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \\ &= B(x,y)\end{aligned}$$

□

2. $B(x, y+1) = \dfrac{y}{x} B(x+1, y) = \dfrac{y}{x+y} B(x, y)$

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$, entonces

$$B(x, y+1) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y)} = \frac{y\Gamma(x)\Gamma(y)}{(x+y)\Gamma(x+y)} = \frac{y}{x+y} B(x, y)$$

Por simetría de la función beta,

$$B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y) = \frac{x}{y}\frac{y}{x} B(x, y) = \frac{x}{y} B(x, y+1)$$

$$\Longrightarrow B(x, y+1) = \frac{y}{x} B(x+1, y) = \frac{y}{x+y} B(x, y)$$

□

Problema 4

Pruebe que para todo $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$ se tiene

1. $B(x, y) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}(\theta) \sin^{2y-1}(\theta) d\theta.$

Demostración. Consideremos el cambio de variable $t = \tan^2(\theta)$, $dt = 2\tan(\theta)\sec^2(\theta)d\theta$, entonces

$$\begin{aligned} B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt &= 2\int_0^{\pi/2} \frac{\tan^{2x-2}(\theta)}{\sec^{2x+2y}(\theta)} \tan(\theta)\sec^2(\theta)d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2x-1}(\theta)}{\cos^{2x-1}(\theta)} \cos^{2x+2y-2}(\theta)d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}(\theta)\cos^{2y-1}(\theta)d\theta \end{aligned}$$

□

2. $B(x, y) = \displaystyle\int_0^1 w^{x-1}(1-w)^{y-1} dw.$

Demostración. Consideremos el cambio de variable $w = \sin^2(\theta)$, $dw = 2\sin(\theta)\cos(\theta)d\theta$, luego

$$\int_0^1 w^{x-1}(1-w)^{y-1} dw = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-2}(\theta)\cos^{2y-2}(\theta)\sin(\theta)\cos(\theta)d\theta d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}(\theta)\cos^{2y-1}(\theta)d\theta = B(x, y)$$

□

Problema 5

Calcule las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^4(\theta)d\theta$

   Solución. Notemos que tenemos simetría respecto a la recta $x = \pi$, luego

$$\int_0^{2\pi} \sin^4(\theta)d\theta = 2\int_0^{\pi} \sin^4(\theta)d\theta$$

   Utilizando el cambio de variable $2t = \theta$, tenemos

$$\int_0^{\pi} \sin^4(\theta)d\theta = 2\int_0^{\pi} \sin^4(2t)dt = 2\int_0^{\pi/2} 2^4\sin^4(t)\cos^4(t)dt = 2^4 B(5/2,5/2)$$

   Para calcular $B(5/2,5/2)$ usemos las propiedades del problema 2

$$\begin{aligned}
B(5/2,5/2) = \frac{3/2}{3/2+5/2}B(5/2,3/2) &= \frac{3}{8}B(5/2,3/2) \\
&= \frac{3}{8}\frac{3/2}{3/2+3/2}B(3/2,3/2) \\
&= \frac{3}{2^4}B(3/2,3/2) \\
&= \frac{3}{2^4}\frac{\Gamma(3/2)^2}{\Gamma(3/2+3/2)} \\
&= \frac{3}{2^4}\frac{\pi/4}{2} \\
&= \frac{3}{2^7}\pi
\end{aligned}$$

   donde $\Gamma(3/2) = \Gamma(1/2)/2 = \sqrt{\pi}/2$,

$$\implies \int_0^{2\pi} \sin^4(\theta)d\theta = 2\cdot 2^4\cdot\frac{3}{2^7}\pi = \frac{3}{4}\pi$$

2. $\displaystyle\int_1^3 (x-1)^{10}(x-3)^3dx.$

   Solución. Consideremos el cambio de variable $2t = x-1$, luego

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x-1)^{10}(x-3)^3dx = 2\int_0^1 (2t)^{10}(2t-2)^3dt &= -2^{14}\int_0^1 t^{10}(1-t)^3dt \\
&= -2^{14}B(11,4) \\
&= -2^{14}\frac{\Gamma(11)\Gamma(4)}{\Gamma(11+4)} \\
&= -2^{14}\frac{10!3!}{14!} \\
&= -2^{14}\frac{3\cdot 2}{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11} \\
&= \frac{-2^{12}}{7\cdot 13\cdot 11} \\
&= -\frac{4096}{1001}
\end{aligned}$$