Problema 1

1. Sean $z_1, \dots, z_d \in \mathbb{C}$ y
$$p(z) = \prod_{j=1}^{d} (z - z_j)^{n_j}$$
Pruebe que
$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{j=1}^{d} \frac{n_j}{z - z_j}$$

Demostración. Por inducción sobre d. Para $d = 1$, entonces
$$p(z) = (z - z_1)^n \implies p'(z) = n(z - z_1)^{n-1}$$
$$\implies \frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{n(z - z_1)^{n-1}}{(z - z_1)^n} = \frac{n}{z - z_1}$$
Si suponemos que la igualdad es cierta para $d \in \mathbb{N}$, escribamos $q(z) = \prod_{j=1}^{d} (z - z_j)^{n_j}$, luego
$$p(z) = q(z)(z - z_{d+1})^{n_{d+1}} \implies p'(z) = q'(z)(z - z_{d+1})^{n_{d+1}} + n_{d+1}(z - z_{d+1})^{n_{d+1}-1} q(z)$$
$$\begin{aligned}
\implies \frac{p'(z)}{p(z)} &= \frac{q'(z)}{q(z)} \frac{\cancel{(z - z_{d+1})^{n_{d+1}}}}{\cancel{(z - z_{d+1})^{n_{d+1}}}} + \frac{n_{d+1}(z - z_{d+1})^{n_{d+1}-1} \cancel{q(z)}}{(z - z_{d+1})^{n_{d+1}} \cancel{q(z)}} \\
&= \sum_{j=1}^{d} \frac{n_j}{z - z_j} + \frac{n_{d+1}}{z - z_{d+1}} \\
&= \sum_{j=1}^{d+1} \frac{n_j}{z - z_j}
\end{aligned}$$
Concluyendo que
$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{j=1}^{d} \frac{n_j}{z - z_j}$$
□

2. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y sea $K \subseteq \Omega$ un compacto con frontera de clase C^1. Demuestre que si N es el número de ceros de f en K, entonces
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N$$

Demostración. Como K es compacto[1], $N \in \mathbb{N}$. Existe entonces $g \in \mathcal{O}^*(\Omega)$ tal que
$$f(z) = (z - z_1)^{n_1} \cdots (z - z_d)^{n_d} g(z), \qquad \forall z \in \Omega$$
donde $n_1 + \cdots + n_d = N$. Notemos que si $p(z) = \prod_{j=1}^{d} (z - z_j)^{n_j}$, entonces, por el ítem anterior
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{p'(z)\cancel{g(z)}}{p(z)\cancel{g(z)}} + \frac{\cancel{p(z)}g'(z)}{\cancel{p(z)}g(z)} = \sum_{j=1}^{d} \frac{n_j}{z - z_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

[1] ver ayudantía 4

De esta forma,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{f'(z)}{f(z)}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\sum_{j=1}^{d}\frac{n_j}{z-z_j}+\frac{g'(z)}{g(z)}dz \\
&= \sum_{j=1}^{d}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{n_j}{z-z_j}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{g'(z)}{g(z)}dz \\
&= \sum_{j=1}^{d} n_j = N \\
&\implies \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = N
\end{aligned}$$

donde $g'/g \in \mathcal{O}(\Omega)$ y por tanto por el Teorema de Cauchy

$$\int_{\partial K}\frac{g'(z)}{g(z)}dz = 0$$

y $z \mapsto n_j$ función constante es holomorfa y $n_j \in K$, entonces por la fórmula integral de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{n_j}{z-z_j}dz = n_j$$

de donde concluimos el resultado.

□

3. Sean $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ y $K \subseteq \Omega$ un compacto con frontera de clase $\mathscr{C}^1$. Si $|g(z)| < |f(z)|$ sobre ∂K. Entonces f y $f+g$ tienen la misma cantidad de ceros en $\text{int}(K)$.

Demostración. Definamos $F = g/f$ sobre ∂K. Sean n_1 y n_2 el número de ceros de $f+g$ y f respectivamente. Por el ítem anterior

$$n_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{f'+g'}{f+g}dz, \qquad n_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{f'}{f}dz$$

Luego

$$\begin{aligned}
n_1 - n_2 &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{f'+g'}{f+g}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{f'}{f}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{f'+f'F+fF'}{f+fF}dz - \frac{f'}{f}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{f'(1+F)+fF'}{f(1+F)} - \frac{f'}{f}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{f'}{f}+\frac{F'}{(1+F)} - \frac{f'}{f}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{F'}{(1+F)}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}F'\sum_{n\in\mathbb{N}}F^n dz \\
&= 0
\end{aligned}$$

donde $|F| = |g/f| < 1$ en ∂K, luego

$$\frac{1}{1-F} = \sum_{n\in\mathbb{N}}F^n$$

y finalmente, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\partial K}F'F^n dz = 0$$

□

Observación. Notemos que, como $|F| < 1$, podemos definir $g(z) = \log(1 - F(z))$ para alguna rama del logaritmo (por ejemplo la principal), notando que

$$g'(z) = \frac{F'(z)}{1 - F(z)}, \qquad \forall z \in \partial K$$

De donde

$$\int_{\partial K} \frac{F'(z)}{1 - F(z)} dz = \int_{\partial K} dg = 0$$

Problema 2

Sea $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Demuestre que f es un polinomio si y solo si existen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ tales que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - z_j} \tag{1}$$

Demostración. Supongamos que tenemos (1), integrando la expresión sobre la frontera de un compacto que contiene a $z_1, \ldots, z_n$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f'}{f} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - z_j} dz = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{1}{z - z_j} dz = n$$

Por el problema 1b), f tiene exactamente n ceros en K, mientras que si integramos sobre la frontera de un compacto que no contiene a $z_1, \ldots, z_n$, la integral es cero (por el Teorema de Cauchy), de esta forma, los únicos ceros de f son $z_1, \ldots, z_n$ y luego existe una función entera $g \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C})$ tal que

$$f(z) = g(z) \prod_{j=1}^{n} (z - z_j), \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Así, definiendo $q(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - z_j)$ y derivando, por la regla del producto tenemos

$$f'(z) = g'(z)q(z) + g(z)q'(z)$$

$$\implies \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - z_j} = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{q'(z)}{q(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - z_j}$$

$$\implies \frac{g'(z)}{g(z)} = 0, \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Como $g \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C})$, tenemos que $g'(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y por tanto g es constante, concluyendo que f es un polinomio. El recíproco ya lo probamos en el problema 1a).

□

Problema 3

Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfa tal que $f(0) = 0$. Probar que $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y que $|f'(0)| \leq 1$.

Demostración. Como $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$, por el lema de Schwarz

$$|f(z)| \leq M|z|^m, \qquad \forall z \in \mathbb{D}$$

Como $z \in \mathbb{D}$, entonces $|z|^m \leq |z|$ y como $f(z) \in \mathbb{D}$ para todo $z \in \mathbb{D}$, entonces $M = \sup_{\mathbb{D}} |f| \leq 1$, luego

$$|f(z)| \leq M|z|^m \leq |z|, \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

Finalmente, por la desigualdad de Cauchy

$$|f'(0)| \leq \frac{1}{r} \sup_{\partial \overline{D}(0,r)} |f| \leq \frac{1}{r} \sup_{\overline{D}(0,r)} |z| = 1$$

□

Problema 4

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto tal que $\overline{\mathbb{D}} \subseteq \Omega$ y sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ no constante tal que $|f(z)| = 1$ para todo $z \in \partial\mathbb{D}$. Pruebe que

1. f debe tener al menos un cero en $\mathbb{D}$.
   Indicación. Use el principio del máximo.

   Demostración. Supongamos que f no se anula en $\mathbb{D}$, luego la función $1/f$ es holomorfa en $\mathbb{D}$. Notemos que como $|f(z)| = 1$ para todo $z \in \partial\mathbb{D}$, tenemos que $|1/f(z)| = 1$ para todo $z \in \partial\mathbb{D}$. Como f y $1/f$ son holomorfas, por el principio del máximo,

   $$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \sup_{\partial\mathbb{D}} |f| = 1, \qquad \sup_{\mathbb{D}} \left|\frac{1}{f}\right| = \sup_{\partial\mathbb{D}} \left|\frac{1}{f}\right| = 1$$

   De donde $1 \leq |f| \leq 1$ y por tanto f tiene módulo constante en $\mathbb{D}$ y por tanto f es constante en $\mathbb{D}$[2], lo que es una contradicción, por lo tanto f debe tener una raíz en $\mathbb{D}$.

   □

2. la ecuación $f(z) = w_0$ tiene al menos una solución para cada $w_0 \in \mathbb{D}$, esto es, la imagen de f contiene el disco unitario.
   Indicación. Use la pregunta 1*c*.

   Demostración. Consideremos la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ constante $g(z) = -w_0 \in \mathbb{D}$, entonces $|g(z)| = |w_0| < 1 = |f(z)|$ para todo $z \in \partial\mathbb{D}$. Por la pregunta 1*c*, las funciones f y $f + g$ tienen la misma cantidad de ceros. Por el ítem anterior, f tiene al menos un cero en $\mathbb{D}$ y por tanto $f + g$ tiene al menos un cero, i.e. existe $z \in \mathbb{D}$ tal que $f(z) - w_0 = 0$. Como esto se tiene para todo $w_0 \in \mathbb{D}$, concluimos que $\mathbb{D} \subseteq f(\Omega)$.

   □

Problema 5

1. Sea f holomorfa en el anillo $1 \leq |z| \leq 2$ tal que $|f(z)| \leq 3$ en $|z| = 1$ y $|f(z)| \leq 12$ cuando $|z| \leq 2$. Muestre que $|f(z)| \leq 3|z^2|$ para $1 \leq |z| \leq 2$.

   Demostración. Sea $g(z) = f(z)/3z^2$, como $0 \notin A := \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$ entonces g es holomorfa en A. Ahora,

   $$|g(z)| \leq \left|\frac{f(z)}{3z^2}\right| = \frac{|f(z)|}{3 \cdot 1} \leq 1, \qquad \forall z \in \partial\mathbb{D}$$

   Además,

   $$|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{3z^2}\right| = \frac{|f(z)|}{3 \cdot 4} \leq 1, \qquad \forall z : |z| = 2$$

   De esta forma, $|g(z)| \leq 1$ para $z \in \partial A$ y por el principio del máximo, $\max_A |g| = \max_{\partial A} |g|$ y luego tenemos que $|g(z)| \leq 1$ para todo $z \in A$, es decir, $|f(z)| \leq 3|z|^2$ para todo $z \in A$.

   □

2. Sea f holomorfa en el anillo $1 \leq |z| \leq 2$ tal que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \partial\mathbb{D}$ y $|f(z)| \leq 4$ cuando $|z| = 2$. Pruebe que $|f(z)| \leq |z|^2$ en el anillo.

   Demostración. De forma similar al ítem anterior, definamos $g(z) = f(z)/z^2$ en $A := \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$, luego g es holomorfa en A. Además

   $$|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{z^2}\right| = \left|\frac{f(z)}{1^2}\right| \leq 1, \qquad \forall z : |z| = 1$$

[2] Ayudantía 3

y además

$$|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{z^2}\right| = \left|\frac{f(z)}{2^2}\right| \leq 1, \qquad \forall z : |z| = 2$$

Por lo tanto $|g(z)| \leq 1$ para todo $z \in \partial A$. Por el principio del máximo, $|g(z)| \leq 1$ para todo $z \in A$, es decir $|f(z)| \leq |z|^2$ para todo $z \in A$.

□

3. Sea f holomorfa en $D(0,2)$ tal que $f(1) = 0$ y $f|(z)| < 2$ para todo $z \in D(0,2)$. Encuentre la mejor cota posible para $|f(1/4)|$.

Solución. Sea $g(z) = f(2z)/2$ función holomorfa de $\mathbb{D}$ en sí mismo y sea $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ la función dada por

$$\phi(z) = \frac{z - 1/2}{1 - z/2}$$

En clases se probó que $\phi \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$, con inversa

$$\phi^{-1}(z) = \frac{z + 1/2}{1 + z/2}$$

Tomando $h = g \circ \phi^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, tenemos que $h(0) = g(1/2) = f(1)/2 = 0$. Por el problema 3 de esta ayudantía, $|h(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Esto implica que $|g(z)| \leq |\phi(z)|$, así

$$|g(1/8)| \leq \frac{1/8 - 1/2}{1 - (1/2)(1/8)} = \frac{2}{5}$$

$$\implies |f(1/4)| \leq 2g(1/8) = \frac{4}{5}$$

Por último, notemos que si f es tal que $h(z) = z$, o equivalentemente, $g(z) = \phi(z)$ y por tanto $f(z) = 2g(z/2) = 2\phi(z/2)$, entonces

$$f(1/4) = 2\phi\left(\frac{1/4}{2}\right) = 2\frac{1/8 - 1/2}{1 - (1/2)(1/8)} = -\frac{4}{5}$$

y por lo tanto la cota se alcanza, concluyendo que $4/5$ es la mejor cota posible.