Problema 1

1. Sea $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ y sea $g : \mathbb{H} \to \overline{\mathbb{D}}$ la función definida por

$$g(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

Muestre que g está bien definida, es holomorfa y acotada.

Demostración. Para ver que g está bien definida, observamos que no se indetermina, pues $-i \notin \mathbb{H}$. Además, notamos que si $\mathrm{Im}(z) > 0$, entonces

$$\mathrm{Re}(\overline{z}i) = \mathrm{Im}(z) > 0$$

luego, para todo $z \in \mathbb{H}$

$$|z-i|^2 = |z|^2 - 2\mathrm{Re}(\overline{z}i) + 1 \leq |z|^2 + 2\mathrm{Re}(\overline{z}i) + 1 = |z+i|^2$$

$$\implies |g(z)| = \left|\frac{z-i}{z+i}\right| \leq 1$$

Así, $g(z) \in \overline{\mathbb{D}}$ para todo $z \in \mathbb{H}$, por tanto g está bien definida y es acotada. Finalmente, g es holomorfa, ya que $z+i$ y $z-i$ lo son.

□

2. Sea $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ tal que $Im(f(z)) > 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Pruebe que f es constante.

Demostración. Sea $h = g \circ f : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{D}}$, notemos que como $\mathrm{Im}(f(z)) > 0$, h está bien definida, es holomorfa, pues es composición de funciones holomorfas y es acotada. Por el teorema de Liouville, h es constante, digamos $h(z) = w$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y luego

$$\begin{aligned} w = \frac{f(z)-i}{f(z)+i} &\implies wf(z) + wi = f(z) - i \\ &\implies f(z)(w-1) = -i(w+1) \\ &\implies f(z) = -i\frac{(w+1)}{w-1} \end{aligned}$$

Concluyendo que f es constante.

□

Problema 2

Pruebe que una función entera no constante $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ no puede satisfacer simultáneamente

1. $f(z+1) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$,
2. $f(z+i) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demostración. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función que satisface 1) y 2). Entonces, por inducción tenemos

$$f(z+k) = f(z), \quad f(z+ki) = f(z), \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

y por tanto $f(z+n+mi) = f(z)$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$. Así, definiendo $R = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z),\ \mathrm{Im}(z) \in [0,1]\}$, notamos que

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| = \sup_{z \in R} |f(z)| < \infty$$

donde la última desigualdad se tiene ya que R es compacto y $|f|$ es continua, así, por el teorema de Liouville, tendríamos que f es constante.

□

Comentarios. Notemos que si $a, b > 0$, podemos reemplazar en las propiedades para 1) y 2) 1 por a e i por bi.

Problema 3

Sea $f : \mathbb{C}^* := \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ la función dada por $f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{z}\right)$. Muestre que no existe $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ tal que $F|_{\mathbb{C}^*} = f$.

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{z}\right) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\pi}{z} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Longrightarrow z = \frac{1}{k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{z}\right) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\pi}{z} &= \pi k, && k \in \mathbb{Z} \\ \Longrightarrow z &= \frac{1}{k} && k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Luego, si existe F extensión analítica de f a $\mathbb{C}$, tendríamos $F(1/k) = f(1/k) = 0$ y por continuidad

$$F(0) = \lim_{k\to+\infty} F(1/k) = 0$$

Por tanto F es no nula y tiene un cero que no es un punto aislado, por lo que no puede ser holomorfa. $\square$

Problema 4

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $u \in \mathscr{C}^2(\Omega; \mathbb{R})$ una función armónica, es decir $\Delta u = 0$.

1. Pruebe que si Ω es conexo, existe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $\mathrm{Re}(f) = u$.

   Demostración. Consideremos la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por $g(x + yi) = \partial_x u(x, y) - \partial_y u(x, y)$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + i\frac{\partial g}{\partial y}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - i\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + i\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - i\frac{\partial^2 u}{\partial v}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}(\Delta u) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Como esto se cumple en Ω, g es holomorfa. Finalmente, como Ω es conexo, g admite una primitiva $f : \Omega \to \mathbb{C}$, definida por

$$f(z) = \int_{\gamma_z} g(w)dw + c$$

   donde γ_z es cualquier curva que una $z_0 \in \Omega$ fijo y $z \in \Omega$, y $c \in \mathbb{C}$ lo elegimos tal que $\mathrm{Re}(f) = u$. La función está bien definida ya que si γ, γ' son dos caminos uniendo z_0 y z, entonces, como g es holomorfa, por el teorema de Cauchy

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\gamma\cup-\gamma'} g(w)dw &= \int_\gamma g(w)dw + \int_{-\gamma'} g(w)dw \\ \Longrightarrow \int_\gamma g(w)dw &= \int_{\gamma'} g(w)dw \end{aligned}$$

   Por último, se puede elegir $c \in \mathbb{C}$ de forma que $\mathrm{Re}(f) = u$ debido a que[1] $f' = g$ y por tanto

$$\nabla \mathrm{Re}(f) = \nabla u \Longrightarrow \nabla(\mathrm{Re}(f) - u) = 0$$

   Como Ω es conexo, $f = u + c$, donde $c \in \mathbb{C}$ es alguna constante. $\square$

[1] aparece como consecuencia en la demostración del Teorema de Morera

2. Pruebe que si $z_0 \in \Omega$, entonces para todo $r > 0$ tal que $\overline{D}(z_0, r) \subseteq \Omega$

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) dt$$

Demostración. Para $r > 0$, $\overline{D}(z_0, R) \subseteq \Omega$ es conexo, luego existe $f \in \mathcal{O}(\overline{D}(z_0, r))$ tal que $\mathrm{Re}(f) = u$. Por la fórmula integral de Cauchy,

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) dt + i \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{it}) dt \right) \end{aligned}$$

donde $v = \mathrm{Im}(f)$, como u, v son reales, tomando parte real a ambos lados obtenemos

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) dt$$

□

3. Pruebe que si $z_0 \in \Omega$ es un cero de u, entonces para todo $r > 0$ tal que $\overline{D}(z_0, r) \subseteq \Omega$ existe $z \in \overline{D}(z_0, r)$ tal que $u(z) = 0$.

Demostración. Por el ítem anterior,

$$0 = u(z_0) = \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) dt$$

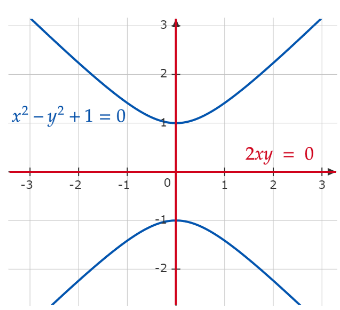
Si $u(w) > 0$ para todo $w \in \partial D(z_0, r)$, entonces la integral será positiva, lo mismo ocurre si $u(w) < 0$ para todo $w \in \partial D(z_0, r)$ y por tanto u no mantiene el signo en $\partial D(z_0, r)$, por el teorema del valor intermedio existe $z \in \partial D(z_0, r)$ tal que $u(z) = 0$.

□

Comentario. En particular, esto muestra que los ceros de las funciones armónicas no pueden ser puntos aislados, al contrario que con las funciones holomorfas. Un ejemplo de esto es la función $f(z) = z^2 + 1$, cuyos únicos ceros son $-i, i$. Sin embargo,

$$f(x + yi) = x^2 - y^2 + 1 - 2xyi$$

definiendo $u(x, y) = \mathrm{Re}(f(x + yi))$ y $v(x, y) = \mathrm{Im}(f(x + yi))$, tenemos que



Problema 5

Sea f una función entera tal que $|f(z)| \to +\infty$ cuando $|z| \to +\infty$. Pruebe que f es un polinomio.

Demostración. Por definición, para todo $k > 0$, existe $M > 0$ tal que si $|z| > M$ entonces $|f(z)| > k$. En particular, existe $R > 0$ tal que $|f(z)| > 1$ para todo z fuera del disco $\overline{D}(0, R)$. Como $\overline{D}(0, R)$ es compacto, f debe tener una cantidad finita de ceros, $z_1, \ldots, z_n$, pues de otra forma, existiría un cero que es punto de acumulación. De esta forma, para z_1, existe g_1 entera tal que g_1 no se anula en una vecindad de z_1 y $f(z) = (z - z_1)^{r_1} g_1(z)$. De forma inductiva, existirá g entera tal que no se anula y

$$f(z) = (z - z_1)^{r_1}(z - z_2)^{r_2} \cdots (z - z_n)^{r_n} g(z)$$

Para simplificar notación, sea $p(z) = (z - z_1)^{r_1}(z - z_2)^{r_2} \cdots (z - z_n)^{r_n}$ polinomio mónico de grado $N = r_1 + \cdots + r_n$. Como g no se anula, definamos $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como $h(z) = 1/g(z)$, que es también entera. Como $|f(z)| \to +\infty$ cuando $|z| \to +\infty$, tenemos que

$$\lim_{|z| \to +\infty} \left| \frac{p(z)}{h(z)} \right| = \lim_{|z| \to +\infty} |p(z)g(z)| = \lim_{|z| \to +\infty} |f(z)| = +\infty$$

Luego, dado $k > 0$, existe $r > 0$ tal que

$$|z| > r \Longrightarrow \left| \frac{p(z)}{h(z)} \right| > k \Longrightarrow |h(z)| < \frac{1}{k} |p(z)| \leq M_1 (1 + |z|)^N$$

para alguna constante $M_1 > 0$. Por otro lado, como $\overline{D}(0, r)$ es compacto, h alcanza su máximo, luego existe $M_2 > 0$ tal que

$$|h(z)| \leq \sup_{w \in \overline{D}(0,r)} |h(w)| = M_2 \leq M_2 (1 + |z|)^N, \qquad \forall z \in \overline{D}(0, r)$$

Finalmente, para $A = \max\{M_1, M_2\}$, tenemos que $|h(z)| \leq A(1 + |z|)^N$ para todo $z \in \mathbb{C}$, de donde concluimos que h es un polinomio. Pero $h = 1/g$ no tiene raíces, por tanto por el Teorema fundamental del álgebra, debe ser constante. Así,

$$f(z) = \frac{1}{h}(z - z_1)^{r_1} \cdots (z - z_n)^{r_n}$$

$\square$