Problema 1

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ una región[1] y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

1. Pruebe que si $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$, entonces f es constante.

   Demostración. Sea $z_0 \in \Omega$ fijo, luego, como Ω es conexo, para cada $z \in \Omega$ existe $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ camino de clase $\mathscr{C}^1$ de z_0 a z. Luego

   $$0 = \int_\gamma df = \int_\gamma f'(z)dz = f(z_0) - f(z)$$
   $$\implies f(z) = f(z_0), \qquad \forall z \in \Omega$$

   concluyendo que f es constante.

   □

2. Muestre que si $Re(f)$, $Im(f)$ o $|f|$ son constantes, entonces f es constante.

   Demostración. Sea $u = Re(f)$, $v = Im(f)$. Si u es constante, entonces $\nabla u = 0$ y por tanto

   $$|f'(z)|^2 = \|\nabla u\|_{\text{euc}}^2 = 0 \implies f'(z) = 0, \qquad \forall z \in \Omega$$

   Por el ítem anterior, f es constante. De forma análoga, si v es constante,

   $$|f'(z)|^2 = \|\nabla v\|_{\text{euc}}^2 = 0$$

   y por tanto f es constante. Finalmente, sea $|f|$ constante, si $|f| = 0$ se tiene que $f = 0$ y por tanto es constante. Si $|f| > 0$ entonces $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$ y

   $$f\overline{f} = |f|^2 \implies \overline{f} = \frac{|f|^2}{f}$$

   Como $|f|^2$ es constante y f holmorfa, $\overline{f}$ es holomorfa en Ω y por tanto

   $$\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}} = 0$$

   Por el ítem anterior concluimos que f es constante.

   □

Problema 2

Usando la fórmula de Cauchy de manera conveniente, calcule

$$\int_\Gamma \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz$$

donde $\Gamma = \partial D(0, 3)$.

Solución. Note que no podemos usar directamente la fórmula integral de Cauchy, pues tanto 1 como 2 están en $D(0, 3)$. Utilizando fracciones parciales

$$\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$
$$\implies A(z-2) + B(z-1) = 1$$

[1] i.e. abierto y conexo

Evaluando en $z=1$, tenemos que $A=-1$ y evaluando en $z=2$, tenemos que $B=1$. De esta forma

$$-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

$$\implies \int_\Gamma \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}dz=\int_\Gamma \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-2)}dz-\int_\Gamma \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)}dz$$

Como la función $z\mapsto \sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)$ es holomorfa y $\overline{D}(0,3)$ es un compacto con frontera de clase $\mathscr{C}^1$, entonces, por la fórmula integral de Cauchy

$$\int_\Gamma \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-2)}dz=2\pi i(\sin(4\pi)+\cos(4\pi))=2\pi i$$

$$\int_\Gamma \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)}=2\pi i(\sin(\pi)+\cos(\pi))=-2\pi i$$

$$\implies \boxed{\int_\Gamma \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}dz=4\pi i}$$

Problema 3

Sea $k\in\mathbb{N}^{\geq 1}$. Calcule la integral real

$$\int_0^{2\pi} e^{k\cos(t)}\cos(k\sin(t))dt$$

Solución. Notemos que

$$e^{k\cos(t)}\cos(k\sin(t))=Re(e^{k\cos(t)}(\cos(k\sin(t))+i\sin(k\sin(t))))$$
$$=Re(e^{k(\cos(t)+i\sin(t))})$$

Usando el cambio de variable $z=e^{it}$, con $dz=ie^{it}dt=izdt$ podemos reescribir la integral como

$$\int_0^{2\pi} e^{k\cos(t)}\cos(k\sin(t))dt=\int_0^{2\pi} Re\left(e^{k(\cos(t)+i\sin(t))}\right)dt$$

$$=Re\left(\int_0^{2\pi} e^{k(\cos(t)+i\sin(t))}\right)=Re\left(\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{e^{kz}}{iz}dz\right)$$

Como la función $z\mapsto e^{kz}$ es holomorfa, por la fórmula integral de Cauchy

$$\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{e^{kz}}{iz}dz=\frac{2\pi i e^{k\cdot 0}}{i}=2\pi$$

Concluyendo así que

$$\boxed{\int_0^{2\pi} e^{k\cos(t)}\cos(k\sin(t))dt=2\pi}$$

Comentario. Aquí pudimos intercambiar la parte real con la integral pues si $f=u+iv:[a,b]\to\mathbb{C}$, debido a la linealidad de la integral

$$\int_a^b f(t)dt=\int_a^b u(t)dt+i\int_a^b v(t)dt$$

Como tanto $\int_a^b udt$, $\int_a^b vdt$ son reales, se tiene que

$$Re\left(\int_a^b f(t)dt\right)=\int_a^b u(t)dt=\int_a^b Re(f(t))dt$$

Problema 4

Pruebe que si $f \in \mathcal{O}(D(z_0, R))$ entonces para todo $r \in]0, R[$ se tiene

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

Deduzca que para $0 < r < 1$

$$\int_0^{2\pi} \log(1 + re^{it}) dt = 0$$

Demostración. Si $0 < r < R$, entonces $\overline{D}(z_0, r) \subseteq D(z_0, R)$. Como f es holomorfa, por la fórmula integral de Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Usando el cambio de variable $z = z_0 + re^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$, tenemos que $dz = ire^{it} dt$

$$\implies f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt$$

$$\implies \boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt}$$

Si $0 < r < 1$, entonces $D(1, r)$ está contenido en el dominio del logaritmo, luego log es holomorfa en $D(1, r)$, aplicando la fórmula anterior

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(1 + re^{it}) dt = \log(1) = 0$$

$$\implies \boxed{\int_0^{2\pi} \log(1 + re^{it}) dt = 0}$$

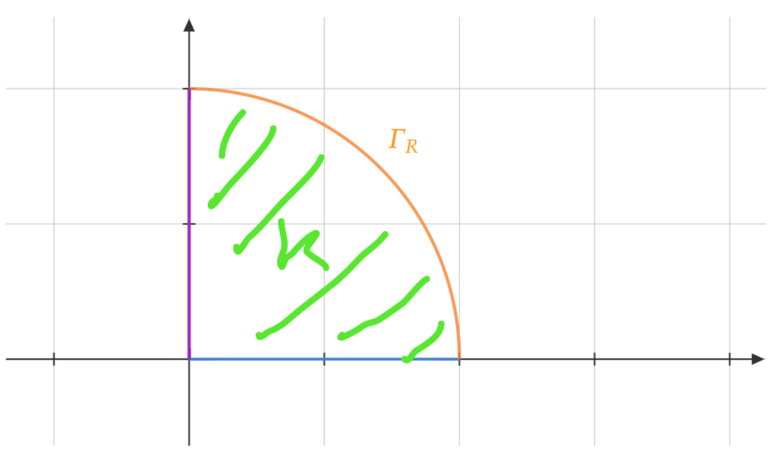
□

Problema 5

Calcule las integrales reales

1. $$\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx$$

   Solución. Notemos que las raíces de $x^4 + 1$ son $\{e^{i\pi/4}, e^{i3\pi/4}, e^{i5\pi/4}, e^{7\pi/4}\}$ y consideremos para $R > 0$ el conjunto $K = \{re^{it} \in \mathbb{C} : r \leq R, 0 \leq t \leq \pi/2\}$. Sea $\Gamma = \partial K$.



Nos interesan los valores de grandes de R, para los cuales solo $e^{i\pi/4} \in K$. Factorizando z^4+1 y escribiendo

$$f(z) = \frac{1}{(z-e^{3i\pi/4})(z-e^{5i\pi/4})(z-e^{7\pi/4})}$$

tenemos que f es holomorfa en K y

$$\int_\Gamma \frac{1}{z^4+1}dz = \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-e^{i\pi/4})}dz$$

Por la fórmula integral de Cauchy

$$\int_\Gamma \frac{1}{z^4+1}dz = \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-e^{i\pi/4})}dz = 2\pi i f(e^{i\pi/4})$$

donde

$$(e^{i\pi/4}-e^{3i\pi/4})(e^{i\pi/4}-e^{5i\pi/4})(e^{i\pi/4}-e^{7i\pi/4})$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i-(-1+i))\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i-(-1-i))\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i-(1-i))$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{8}(2)(2+2i)(2i) = 2\sqrt{2}(1+i)i$$

$$\implies 2\pi i f(e^{i\pi/4}) = \frac{2\pi i}{2\sqrt{2}(1+i)i} = \frac{\pi(1-i)}{|1+i|^2\sqrt{2}} = \frac{\pi(1-i)}{2\sqrt{2}}$$

$$\implies \int_\Gamma \frac{1}{z^4+1}dz = \frac{\pi(1-i)}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}(1-i)$$

Por otro lado, si consideramos $\Gamma_R = \{Re^{it}, t \in [0,\pi/2]\}$, entonces

$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^4}dz\right| \leq \ell(\Gamma_R) \sup_{z\in\Gamma_R}\left|\frac{1}{z^4+1}\right|$$

$$= \frac{\pi}{2}R \sup_{t\in[0,\pi/2]} \frac{1}{|R^4e^{4it}+1|} = \frac{R\pi}{2(R^4-1)} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

Luego

$$\int_\Gamma \frac{1}{1+z^4}dz = \int_0^R \frac{1}{1+x^4}dx + \int_{\Gamma_R}\frac{1}{1+z^4}dz + \int_0^R \frac{1}{1+y^4}(-i)dy$$

$$\int_\Gamma \frac{1}{1+z^4}dz = (1-i)\int_0^R \frac{1}{1+x^4}dx + \int_{\Gamma_R}\frac{1}{1+z^4}dz$$

Tomando el límite $R \to +\infty$

$$\implies \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}dx = \frac{1}{1-i}\int_\Gamma \frac{1}{1+z^4}dz = \frac{1}{1-i}\frac{\sqrt{2}\pi}{4}(1-i) = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi}$$

2.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\cos(x)}dx$$

Solución. Consideremos el cambio de variable $z = e^{ix}$, luego $dz = ie^{ix}dx = izdx$. Luego

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\cos(x)}dx = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1}{5+3(z+z^{-1})/2}\frac{1}{iz}dz = -i\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{2}{10z+3z^2+3z}dz$$

El polinomio $3z^2 + 10z + 3z$ tiene raíces

$$z = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4\cdot 3\cdot 3}}{2\cdot 3} = \frac{-10 \pm \sqrt{100-36}}{6} = \frac{-10 \pm 8}{6} = \frac{-5 \pm 4}{3}$$

luego $z_1 = -3$ y $z_2 = -1/3$, de donde $z_2 \in \mathbb{D}$. Escribimos

$$\int_{\partial \mathbb{D}} \frac{1}{3z^2 + 10z + 3} dz = \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{1}{3(z+3)(z+1/3)} dz$$

La función $f(z) = 1/(z+3)$ es holomorfa y $\overline{\mathbb{D}}$ compacto con borde $\mathscr{C}^1$, luego por la fórmula integral de Cauchy

$$\int_{\partial \mathbb{D}} \frac{1}{3z^2 + 10z + 3} dz = \frac{1}{3}\int_{\partial \mathbb{D}} \frac{f(z)}{z - (-1/3)} dz = \frac{1}{3} 2\pi i f(-1/3) = \frac{2\pi i}{3}\frac{1}{3 - 1/3} = \frac{\pi i}{4}$$

$$\implies \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3\cos(x)} dx = -2i \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{1}{3z^2 + 10z + 3} dz = -2i\frac{i\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3\cos(x)} dx = \frac{\pi}{2}}$$

Problema 6

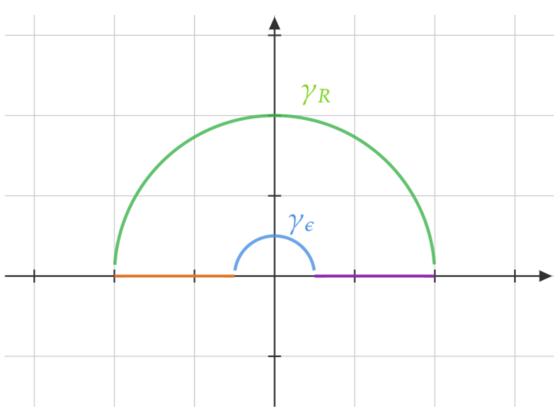
Calcule la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

Solución. Notemos que, por pariedad,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} - 1}{x} dx$$

Consideremos el compacto K con frontera



Luego, como $z \mapsto (e^{iz} - 1)/z$ es holomorfa, por el teorema de Gousat

$$\int_{\partial K} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz = 0$$

Por otro lado,

$$\int_{\partial K} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix} - 1}{x} dx + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix} - 1}{x} dx + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz \tag{1}$$

Para la suma de integrales

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}-1}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}-1}{x}dx = -\int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{-ix}-1}{x} + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}-1}{x}dx = 2i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin(x)}{x}dx$$

Tomanto el límite $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$ tenemos

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0^+} 2i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin(x)}{x}dx = 2i\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$$

Para la integral de γ_ε, consideremos la parametrización $z(t) = \varepsilon e^{i(\pi-t)}$, luego $z'(t) = -\varepsilon i e^{i(\pi-t)}dt = -iz(t)$, con $t \in [0,\pi]$

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}-1}{z}dz = \int_0^\pi \frac{e^{iz(t)}-1}{z(t)}(-iz(t))dt = -i\int_0^\pi (e^{i\varepsilon\exp(i(\pi-t))}-1)dt$$

Tomando $\varepsilon \to 0$ tenemos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}-1}{z}dz = 0$$

Por último,

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}-1}{z}dz = \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}dz - \int_{\gamma_R} \frac{1}{z}dz$$

Para la primera integral, consideramos la parametrización $z(t) = Re^{it}$, para $t \in [0,\pi]$, luego $z'(t) = iz(t)$.

$$\implies \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}dz = i\int_0^\pi e^{iR\exp(it)}dt$$

$$\implies \left|i\int_0^\pi e^{iR\exp(it)}dt\right| = \left|e^{iR(\cos(t)+i\sin(t))}\right| \le \int_0^\pi |e^{iR\cos(t)}||e^{-R\sin(t)}|dt = \int_0^\pi e^{-R\sin(t)}dt$$

$$\implies \left|i\int_0^\pi e^{iR\exp(it)}dt\right| \le \int_0^\pi e^{-R\sin(t)}dt \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$$

Mientras que

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{z}dz = \int_0^\pi \frac{1}{z(t)}iz(t)dt = i\int_0^\pi dt = i\pi \implies \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} \frac{1}{z}dz = i\pi$$

Juntando lo anterior, tomando $R \to +\infty$ y $\varepsilon \to 0$ en (1) obtenemos

$$0 = 2i\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx - i\pi$$

$$\implies \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}}$$