Problema 1

1. Pruebe que la función seno complejo $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es sobreyectiva.

   Demostración. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, luego

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = z_0 \iff e^{iz} - e^{-iz} = 2iz_0$$
$$\iff e^{2iz} - 1 = 2iz_0 e^{iz} \iff e^{2iz} - 2iz_0 e^{iz} - 1 = 0$$
$$\iff u^2 - 2iz_0 u - 1 = 0 \quad \wedge \quad u = e^{iz}$$

   Como $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, la ecuación $u^2 - 2iz_0 u - 1 = 0$ tiene solución $u_0 \in \mathbb{C}$. Notando que $u_0 \neq 0$, entonces la ecuación $e^{iz} = u_0$ tiene solución y por tanto existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $\sin(z) = z_0$.

   □

2. Encuentre todos los valores de $z \in \mathbb{C}$ tal que $\sin(z) = 0$.

   Solución. Por definición del seno complejo,

$$\sin(z) = 0 \iff \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \iff e^{2iz} = 1$$

   Sabemos que $e^0 = 1$ y que la función exponencial es periódica con periodo $2\pi i$, luego

$$2iz = 2\pi k i, \quad k \in \mathbb{Z} \implies \boxed{z = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Problema 2

Utilizando distintas ramas del logaritmo, calcule

1. $\log_\varphi(-1)$

   Solución. Sabemos que

$$\log_\varphi(-1) = \ln|-1| + \arg_\varphi(-1) = \arg_\varphi(-1)$$

   Notemos de la identidad de Euler $e^{i\pi} + 1 = 0$ que

$$\arg(-1) = \pi + 2\pi\mathbb{Z}$$

   Si utilizamos $\varphi = \pi$, tenemos que $\arg_\pi(-1) \in]\pi - \pi, \pi + \pi[=]0, 2\pi[$, por tanto $\arg_\pi(-1) = \pi$ y luego

$$\boxed{\log_\pi(-1) = \pi i}$$

   Consideremos ahora $\varphi = -\pi/4$, por tanto

$$-\frac{5\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} - \pi < \arg_\varphi(-1) < -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$$
$$\implies \arg_\varphi(-1) = -\pi$$
$$\implies \boxed{\log_\varphi(-1) = -\pi i}$$

2. i^i.

   Solución. Para poder definir la i^i, recordemos que si $x \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$, entonces

$$x^y := e^{y \ln(x)}$$

De manera análoga tenemos que $i^i = e^{i\log_\varphi(i)}$. Calculemos entonces $\log_\varphi(i)$.

$$\log_\varphi(i) = \ln|i| + \arg_\varphi(i) = \arg_\varphi(i)$$

Observemos que

$$\begin{aligned} e^{iz} = i \implies e^{2iz} = -1 \implies 2iz = \pi i \quad \text{mód } 2\pi i \\ \implies z = \frac{\pi}{2} \quad \text{mód } 2\pi \implies \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Consideremos la rama principal $\varphi = 0$, luego $\arg(i) \in]0, 2\pi[$ y por tanto

$$\log_0(i) = \frac{\pi}{2}i$$

Finalmente,

$$\begin{gathered} i^i = e^{i\log_0(i)} = e^{i(\pi/2i)} = e^{-\pi/2} \in \mathbb{R} \\ \implies \boxed{i^i = e^{-\pi/2}} \end{gathered}$$

Podemos considerar ahora $\varphi = 2\pi$, luego

$$\pi = 2\pi - \pi < \arg_{2\pi}(i) < 2\pi + \pi = 3\pi$$

$$\begin{gathered} \implies \log_{2\pi}(i) = \arg_{2\pi}(i) = \frac{5\pi}{2} \\ \implies i^i = e^{i\log_{2\pi}(i)} = e^{i(5\pi/2)i} = e^{-5\pi/2} \\ \implies \boxed{i^i = e^{-5\pi/2}} \end{gathered}$$

Problema 3

Para este problema, considere un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, una función holomorfa $f : \Omega \to \mathbb{C}$ y las funciones $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$, dadas por $u = \Re(f)$, $v = \Im(f)$.

1. Pruebe que $\det(Df(z)) = |f'(z)|^2 = \|\nabla u(z)\|^2_{\text{euc}} = \|\nabla v(z)\|^2_{\text{euc}}$.

Demostración. Como f es holomorfa, es diferenciable en cada $z \in \Omega$ y su diferencial está dado por

$$Df(z) = \begin{pmatrix} \partial_x u(z) & \partial_y u(z) \\ \partial_x v(z) & \partial_y v(z) \end{pmatrix}$$

Así,

$$\det(Df(z)) = \partial_x u(z)\partial_y v(z) - \partial_y u(z)\partial_x v(z)$$

Como f es holomorfa, satisface las ecuaciones de Cauchy Riemann en Ω, es decir

$$\partial_x u = \partial_y v, \qquad \partial_y u = -\partial_x v$$

$$\begin{gathered} \implies \det(Df(z)) = (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 = (\partial_y v)^2 + (\partial_x v)^2 \\ \implies \det(Df(z)) = \|\nabla u(z)\|^2_{\text{euc}} = \|\nabla v(z)\|^2_{\text{euc}}, \qquad \forall z \in \Omega \end{gathered}$$

Por otro lado,

$$Df(z) = \begin{pmatrix} \partial_x u(z) & \partial_y u(z) \\ \partial_x v(z) & \partial_y v(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x u(z) & \partial_y u(z) \\ -\partial_y u(z) & \partial_x u(z) \end{pmatrix}$$

$$\begin{gathered} \implies f'(z) = \frac{1}{2}(\partial_x u(z) + \partial_x u(z) - (\partial_y u(z) - (-\partial_y u(z))i) = \partial_x u(z) - \partial_y u(z)i \\ \implies |f'(z)|^2 = \|\nabla u(z)\|^2_{\text{euc}} = \|\nabla v(z)\|_{\text{euc}} = \det(Df(z)), \qquad \forall z \in \Omega \end{gathered}$$

$\square$

2. Pruebe que si $u, v \in \mathscr{C}^2(\Omega)$[1] y $f'(z_0) \neq 0$ para $z_0 \in \Omega$, entonces existen $r, r' > 0$ y una función holomorfa $g : D(f(z_0), r') \to D(z_0, r)$ tales que $g \circ f|_{D(z_0,r)} = id$ y

$$g'(w) = \frac{1}{f'(w)}, \qquad \forall w \in D(f(z_0), r')$$

Demostración. Como f es holomorfa en $z_0 \in \Omega$, es continuamente diferenciable y

$$\det(Df(z_0)) = |f'(z_0)|^2 \neq 0$$

Por el teorema de la función inversa para funciones reales, existen $r, r' > 0$ y una función continuamente diferenciable $g : D(f(z_0), r') \to D(z_0, r)$ tal que $g \circ f|_{D(z_0,r)} = id_{D(z_0,r)}$ y

$$Dg(w) = Df(g(w))^{-1} = \frac{1}{|f'(g(w))|^2} \begin{pmatrix} \partial_x u(g(w)) & -\partial_y u(g(w)) \\ \partial_y u(g(w)) & \partial_x u(g(w)) \end{pmatrix}$$

Del diferencial $Dg(w)$ vemos que g satisface las ecuaciones de Cauchy Riemann en $D(f(z_0, r'))$, como g es continuamente diferenciable, g es holomorfa. Finalmente,

$$g'(w) = \frac{1}{|f'(g(w))|^2}(\partial_x u(g(w)) + \partial_y u(g(w))i) = \frac{\overline{f'(g(w))}}{|f'(g(w))|^2} = \frac{1}{f'(g(w))}$$

$$\Longrightarrow g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}, \qquad \forall w \in D(f(z_0, r'))$$

□

3. Pruebe que si $f \in \mathscr{C}^3(\Omega)$, entonces f' es holomorfa.

Demostración. Como $f = u + vi$ es de clase $\mathscr{C}^3$, tenemos que $f' = \partial_x u - \partial_y u i$ es de clase $\mathscr{C}^2$, luego, por el teorema de Schwarz

$$\partial_y(-\partial_y u) = \partial_y \partial_x v = \partial_x \partial_y v = \partial_x^2 u$$

Además, por el teorema de Schwarz

$$\partial_y(\partial_x u) = -(\partial_x(-\partial_y u))$$

Luego, f es $\mathbb{R}$-diferenciable y satisface las ecuaciones de Cauchy Riemann en Ω, por lo tanto es holomorfa.

De forma alternativa, notando que f es de clase $\mathscr{C}^3$, se tendrá que f' es de clase $\mathscr{C}^2$ en Ω, luego como f es holomorfa

$$\partial_{\overline{z}} f' = \partial_{\overline{z}} \partial_z f = \partial_z \partial_{\overline{z}} f = 0$$

y por tanto f' satisface la ecuación de Cauchy Riemann en Ω, concluyendo que es holomorfa.

□

Problema 4

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función diferenciable en el sentido real.

1. Muestre que $\partial_{\overline{z}} \overline{f} = \overline{\partial_z f}$.

Demostración. Sean $u = \Re(f)$ y $v = \Im(f)$. Luego,

$$\partial_{\overline{z}} \overline{f} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)\overline{f} = \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f)$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_x u - i\partial_x v + i(\partial_y u - i\partial_y v))$$

[1] Más adelante en el curso veremos que esto es redundante

$$= \frac{1}{2}((\partial_x u + \partial_y v) + (\partial_y u - \partial_x v)i)$$
$$= \overline{\frac{1}{2}((\partial_x u + \partial_y v) - (\partial_y u - \partial_x v)i)}$$
$$= \overline{\frac{1}{2}(\partial_x u - \partial_y v - i\partial_y u + i\partial_x v)}$$
$$= \overline{\frac{1}{2}(\partial_x u + \partial_y v - (\partial_y u + \partial_x v)i)}$$
$$= \overline{\frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f)} = \overline{\frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)f} = \overline{\partial_z f}$$

□

2. Calcule la derivada anti-holomorfa $\partial_{\overline{z}}$ de la función

$$f(z) = (3-i)\overline{z}^3 + 2\overline{z}^2 - i\overline{z} + 5 - 7i$$

Solución. Aplicando la identidad anterior a $\overline{f}$ tenemos que $\overline{\partial_z \overline{f}} = \partial_{\overline{z}} f$, luego

$$\overline{f}(z) = (3+i)z^3 + 2z^2 + iz + 5 + 7i$$
$$\Longrightarrow \partial_z \overline{f}(z) = 3(3+i)z^2 + 4z + i = (9+3i)z^2 + 4z + i$$
$$\Longrightarrow \partial_{\overline{z}} f = \overline{\partial_z \overline{f}} = (9-3i)\overline{z}^2 + 4\overline{z} - i$$

Problema 5

1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $r : \Omega \to \mathbb{R}$ una función. Pruebe que r es armónica si y solo si $s(z) := r(\overline{z})$ es armónica.

Demostración. Notemos que $s(x+yi) = r(x-yi)$, luego

$$\partial_x s(z) = \partial_x r(\overline{z}) \qquad \wedge \qquad \partial_y s(z) = -\partial_y r(\overline{z})$$
$$\Longrightarrow \partial_x^2 s(z) = \partial_x^2 r(\overline{z}), \quad \wedge \quad \partial_y^2 s(z) = \partial_y(-\partial_y r(\overline{z})) = \partial_y^2 r(\overline{z})$$
$$\Longrightarrow \Delta s(z) = \Delta r(\overline{z})$$

De donde concluimos el resultado.

□

2. Sabemos que si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa y $u, v \in \mathscr{C}^2(\Omega)$, con $u = \Re(f)$ y $v = \Im(f)$, entonces u y v son armónicas. ¿Es cierto el recíproco?

Solución. No, consideremos por ejemplo $\Omega = \mathbb{C}$ y $f(z) = \overline{z}$, luego $u(z) = x$, $v(z) = -y$, y por tanto

$$\nabla u = \nabla v = 0$$

pero $\partial_{\overline{z}} f(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y por lo tanto no es holomorfa. Sin embargo, si es cierto que si $u : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ es armónica, entonces existe $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $\Re(f) = u$.