Pregunta 1

1. Sea $p(X) \in \mathbb{R}[X]$ un polinomio no constante a coeficientes reales. Demuestre que si $\alpha \in \mathbb{C}$ es una raíz de $p(X)$, entonces $\overline{\alpha}$ también lo es. ¿Es todavía cierto si el polinomio es a coeficientes complejos? Justifique.

   Demostración. Sea $z \in \mathbb{C}$, veamos que $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Sabemos que para $w \in \mathbb{C}$, se tiene que $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, luego $\overline{z^2} = \overline{z \cdot z} = \overline{z} \cdot \overline{z} = \overline{z}^2$, por inducción, se extiene el resultado para todo $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, para $n = -1$, sabemos que

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \implies \overline{z^{-1}} = \overline{\left(\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right)} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\overline{z}} = \overline{z}^{-1}$$

   concluyendo el resultado para todo $n \in \mathbb{Z}$. Ahora, sea $p \in \mathbb{R}[X]$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $p(\alpha) = 0$, entonces

$$p(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \implies \overline{p(\alpha)} = \overline{\sum_{j=0}^{n} a_j \alpha^j} = \sum_{j=0}^{n} a_j \overline{\alpha}^j = p(\overline{\alpha})$$

   por tanto, si $p(\alpha) = 0$, entonces $\Re(p(\alpha)) = \Im(p(\alpha)) = 0$, por tanto $\overline{p(\alpha)} = p(\overline{\alpha}) = 0$. Por otro lado, note que usamos el hecho de que si $p \in \mathbb{R}[X]$, entonces $\overline{p(X)} = p(\overline{X})$, sin embargo, esto en general no es cierto para $p \in \mathbb{C}[Z]$, pues sus coeficientes también son complejos, luego, al conjugar, cambia el polinomio. De forma más concreta, basta mostrar que para los polinomios lineales $p(Z) = (Z - \alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{C}, \Im(\alpha) \neq 0$, α es raíz de p, mas $\overline{\alpha}$ no.

   □

2. Pruebe la fórmula de Moivre

$$(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx), \qquad \forall x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$$

   Demostración. Sean $x \in \mathbb{R}$. Procederemos por inducción. Sea

$$S = \{n \in \mathbb{N} : (\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx)\}$$

   Claramente $0 \in S$, pues

$$\cos(0) + i\sin(0) = 1 =: (\cos(x) + i\sin(x))^0$$

   Sea ahora $n \in S$, luego

$$\begin{aligned}\cos((n+1)x) + i\sin((n+1)x) &= \cos(nx)\cos(x) - \sin(nx)\sin(x) + \sin(nx)\cos(x)i + \cos(nx)\sin(x)i \\ &= \cos(x)(\cos(nx) + i\sin(nx)) + \sin(x)(i\cos(nx) - \sin(nx)) \\ &= \cos(x)(\cos(nx) + i\sin(nx)) + i\sin(x)(\cos(nx) + i\sin(nx)) \\ &= (\cos(x) + i\sin(x))(\cos(nx) + i\sin(xn))\end{aligned}$$

   Como $n \in S$, tenemos

$$(\cos(nx) + i\sin(xn)) = (\cos(x) + i\sin(x))^n$$
$$\implies \cos((n+1)x) + i\sin((n+1)x) = (\cos(x) + i\sin(x))^n(\cos(x) + i\sin(x)) = (\cos(x) + i\sin(x))^{n+1}$$

   y por tanto $n + 1 \in S$, concluyendo que $S = \mathbb{N}$.

   □

3. Considerando $\exp(z) = e^z := e^x(\cos(y) + i\sin(y))$, con $z = x + yi$, pruebe que para todo $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ la ecuación $z^n = z_0$ tiene exactamente n soluciones de la forma

$$z = \sqrt[n]{|z_0|}\exp\left(\frac{\arg(z_0) + 2k\pi}{n} i\right), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Demostración. Podemos escribir $z_0 = |z_0|e^{i\varphi}$, para $\varphi \in [0, 2\pi]$. Luego,

$$|z|^n = |z_0| \Longrightarrow |z| = \sqrt[n]{|z_0|}$$

Por la fórmula de Moivre $\arg(z^n) = n\arg(z)$ y entonces

$$\begin{aligned} n\arg(z) = \arg(z^n) = \varphi \quad &\text{en } \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \\ \Longrightarrow n\arg(z) = \varphi + 2\pi k, \quad &k \in \mathbb{Z} \\ \Longrightarrow \arg(z) = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad &k \in \mathbb{Z} \\ \Longrightarrow z = \sqrt[n]{|z_0|}\exp\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}i\right) = \sqrt[n]{|z_0|}\exp\left(\frac{\arg(z_0) + 2k\pi}{n}i\right) \end{aligned}$$

Finalmente, si $m \in \mathbb{Z}$ existen $k, q \in \mathbb{Z}$ tales que $|k| < n$ y $m = nq + k$.

$$\Longrightarrow \frac{\varphi + 2\pi(nq + k)}{n} = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + 2\pi q$$

$$\Longrightarrow \frac{\varphi + 2\pi(nq + k)}{n} = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \quad \text{en } \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

Por tanto ambos argumentos definen las mismas soluciones. Si $k < 0$ y $|k| < n$, entonces $0 < n + k < n$

$$\Longrightarrow \frac{\varphi + 2\pi(n + k)}{n} = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + 2\pi$$

$$\Longrightarrow \frac{\varphi + 2\pi(n + k)}{n} = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \quad \text{en } \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

Por tanto definen las mismas soluciones. Concluimos que la ecuación tiene exactamente n soluciones, correspondientes a $k = 0, \ldots, n-1$.

□

Problema 2

Definición 1. Definimos el conjunto de *raíces de la unidad* como el conjunto

$$\mu_\infty := \{z \in \mathbb{C} : \exists n \in \mathbb{Z}, z^n = 1\}$$

1. Sea $z_0 = e^{i\theta}$, donde $\theta \in [0, 2\pi]$ y $\dfrac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$. Demuestre que el conjunto $\{z_0^n : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\partial\mathbb{D}$ y concluya que μ_∞ es denso en $\partial\mathbb{D}$.

   Indicación. Use el hecho de que dado $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, el conjunto $\{xm + n : m, n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{R}$.

   Demostración. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \partial\mathbb{D}$ definida por $f(t) = e^{2\pi t i}$. Luego, $f(\theta/2\pi) = e^{\theta i} = z_0$. Además, si $n, m \in \mathbb{Z}$, entonces

$$f\left(\frac{\theta}{2\pi}m + n\right) = e^{\theta m i + 2\pi n i} = (e^{\theta i})^m e^{2\pi n i} = (e^{\theta i})^m = z_0^m$$

   Sabemos que la exponencial es continua por lo tanto f es continua y sobreyectiva. Sea $U \subseteq \partial\mathbb{D}$ abierto no vacío en $\partial\mathbb{D}$. Como f es continua, $f^{-1}(U)$ es abierto no vacío en $\mathbb{R}$. Por la indicación, como $\theta/2\pi \notin \mathbb{Q}$, el conjunto

$$D := \left\{\frac{\theta}{2\pi}m + n : m, n \in \mathbb{Z}\right\} \subseteq \mathbb{R}$$

   es denso en $\mathbb{R}$, luego $f^{-1}(U) \cap D \neq \emptyset$, entonces existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\frac{\theta}{2\pi}m + n \in f^{-1}(U) \Longrightarrow z_0^m = f\left(\frac{\theta}{2\pi}m + n\right) \in U$$

Es decir, $\{z_0^n : n \in \mathbb{Z}\} \cap U \neq \emptyset$, concluimos que $\{z_0^n : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\partial\mathbb{D}$. Bajo el mismo argumento, $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, y si $p/q \in \mathbb{Q}$, donde $p, q \in \mathbb{Z}$, entonces

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = e^{2\pi \frac{p}{q} i} \in \mu_\infty$$

Luego, tenemos que $f(\mathbb{Q}) = \mu_\infty$, como f es continua y sobreyectiva, $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, tenemos que $\mu_\infty = f(\mathbb{Q})$ es denso en $\partial\mathbb{D}$.

□

Comentario. También se puede argumentar que $D \subseteq \mu_\infty$, luego $\partial\mathbb{D} = \overline{D} \subseteq \overline{\mu_\infty} \subseteq \partial\mathbb{D}$ y por tanto $\overline{\mu_\infty} = \partial\mathbb{D}$.

2. Sea $\mu_\infty := \{z \in \mathbb{C} : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } z^n = 1\}$. Diga si μ_∞ es abierto y/o cerrado en $\mathbb{C}$. Justifique su respuesta.

   Respuesta. Por la pregunta anterior, $\overline{\mu_\infty} = \partial\mathbb{D} \neq \mu_\infty$ por tanto no es cerrado. Además, $f(t) = e^{2\pi t i} \in \mu_\infty$ si y solo si $t = k/n$, donde $n, k \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$, luego $f^{-1}(\mu_\infty) = \mathbb{Q}$. De esta forma, como f es continua y $\mathbb{Q}$ no es abierto, entonces μ_∞ no es abierto.

Pregunta 3

Muestre que es imposible definir un orden completo en $\mathbb{C}$ que respete la estructura de cuerpo, es decir, no es posible definir una relación $\prec$ entre números complejos tal que

(I) Para todo $z, w \in \mathbb{C}$, una y solo una de las siguientes relaciones se cumple:

$$z \prec w, \qquad w \prec z, \qquad z = w$$

(II) Para todo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$,

$$z_1 \prec z_2 \Longrightarrow z_1 + z_3 \prec z_2 + z_3$$

(III) Para todo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, con $0 \prec z_3$

$$z_1 \prec z_2 \Longrightarrow z_1 z_3 \prec z_2 z_3$$

Indicación. Analice si es posible que $0 \prec i$.

Demostración. Supongamos que existe un orden total $\prec$ en $\mathbb{C}$ tal que $\mathbb{C}$ sea un cuerpo ordenado y supongamos que $0 \prec i$. Sean $z, w \in \mathbb{C}$ tal que $z \prec w$. Por III tenemos que

$$z \prec w \Longrightarrow zi \prec wi \Longrightarrow -z \prec -w$$

Por II,

$$0 = z + (-z) \prec z + (-w) \Longrightarrow w = w + 0 \prec (z - w) + w = z \Longrightarrow w \prec z$$

Por I esto es una contradicción, luego no es posible que $0 \prec i$. Como $i \neq 0$, debemos tener $i \prec 0$. Luego, por II

$$0 = i + (-i) \prec 0 + (-i) = -i \Longrightarrow 0 \prec -i$$

Análogo al caso anterior, para $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $z \prec w$, luego

$$z \prec w \Longrightarrow -iz \prec -iw \Longrightarrow -w \prec -z$$

Por lo anterior, esto es una contradicción. Concluimos que es imposible construir un orden total en $\mathbb{C}$ tal que $(\mathbb{C}, \prec)$ sea un cuerpo ordenado.

□

Pregunta 4

Considere la sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$$

1. Pruebe que $f_n \to 0$ uniformemente en $\mathbb{R}$, es decir $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \to 0$.

   Demostración. Notemos que podemos escribir

$$|f_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\sqrt{n}|x|}{1+nx^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{t}{1+t^2} \right)$$

   donde $t = \sqrt{n}|x|$. Luego, como $(1-t)^2 \geq 0$, tenemos

$$1 - 2t + t^2 \geq 0 \Longrightarrow 2t \leq 1 + t^2 \Longrightarrow \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

   Luego

$$|f_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{t}{1+t^2} \right) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow 0 \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

   □

2. Pruebe que $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge uniformemente.

   Demostración. Cada f_n es derivable en $\mathbb{R}$ y

$$f_n'(x) = \frac{1(1+nx^2) - 2nx(x)}{(1+nx^2)^2} = \frac{1+nx^2-2nx^2}{(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$$

   Luego f_n' converge puntualmente a la función

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

   Como g no es continua[1], la convergencia no es uniforme.

   □

Observación.

1. Note que esto en particular prueba que $f_n'(1) \neq 0 = f'(1)$, por tanto f_n' no converge puntualmente a f.
2. Será posible probar (más adelante en el curso) que si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesiones de funciones holomorfas $f_n : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que converge de manera uniforme sobre cada conjunto compacto de Ω a una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$, entonces f es holomorfa y además f_n' converge uniformemente a f' sobre cada conjunto compacto de Ω.

[1]Hecho MAT125: Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a f, entonces f es continua

Pregunta 5

Se definen las *funciones de Bessel* como las soluciones de la EDO

$$z^2 f''(z) + zf'(z) + (z^2 - r^2)f(z) = 0$$

donde $r \in \mathbb{C}$. Se puede probar que si $r \in \mathbb{N}$, entonces las funciones de Bessel se pueden escribir como

$$J_r(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+r)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

Determine el radio de convergencia de la función de Bessel de orden $r \in \mathbb{N}$.

Solución. Sea $r \in \mathbb{N}$, luego

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} n!(n+r)!}{2^{2n+2}(n+1)!(n+1+r)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} \frac{1}{(n+1)(n+r+1)} = 0\end{aligned}$$

Además, $\dfrac{(-1)^n}{n!(n+r)!} \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto por el criterio de d'Alembert, $R = \infty$.

De forma alternativa, por la fórmula de Hadamard,

$$R = \liminf \frac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{1}{n!(n+r)!}}} = \liminf \sqrt[n]{n!(n+r+1)!}$$

Notemos que

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(k/n) = \int_0^1 \ln(x)dx = x\ln(x) - x\Big|_0^1$$

$$= 1\ln(1) - 1 - \lim_{x\to 0} x\ln(x) - x = -1 - \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{1/x} = -1 - \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = -1 - \lim_{x\to\infty} -x = -1$$

Por la continuidad de la continuidad de la exponencial (real)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = e^\ell = e^{-1}$$

Como $\sqrt[n]{1/n^n} = 1/n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, debemos tener que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

Por lo tanto

$$R = \liminf \sqrt[n]{n!(n+r+1)!} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!(n+r+1)!} = \infty$$