Guia 1 de Ejercicios (MAT235)

Pedro Montero

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

1. Preliminares

1. Probar la *desigualdad triangular*, i.e., para todo $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene que
$$||z| - |w|| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|.$$

2. Probar la fórmula de *de Moivre*, i.e., para todo $\theta \in \mathbb{R}$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que
$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$
Usar lo anterior, junto con el Teorema del binomio de Newton, para deducir los valores de $\cos(3\theta)$ y $\sin(3\theta)$.

3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no-vacío, y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua. Probar que la función
$$|f| : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0},\ z \longmapsto |f(z)|$$
es continua.

4. Sean $a, z \in \mathbb{C}$. Probar que si $|z| < 1$ y $|a| < 1$, entonces
$$\left| \frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \right| < 1$$

2. Funciones holomorfas

1. Considere las funciones $f_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por $f_1(z) = \frac{1}{z}$, $f_2(z) = |z|$, $f_3(z) = \operatorname{Arg}(z)$, $f_4(z) = \overline{z}$. Para cada una de ellas, estudie el dominio, recorrido, inyectividad, sobreyectividad e inversas en caso de existir. Estudie la continuidad y diferenciabilidad de ellas considerándolas como funciones en las variables reales (x, y).

2. Considere la función
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (3x - 2, -3y + 1).$$
Determine todos los puntos donde f es diferenciable en sentido real. Determine, usando la definición, los puntos donde f es derivable en sentido complejo.

3. Series de potencias

1. Analizar la convergencia de la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}.$$

2. Considere la serie $f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n$, donde
$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{(-1)^{n/2}}{n!} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$
Calcular el radio de convergencia de f.

3. Determine el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(in) \left(\frac{z}{1+i} \right)^{2n}.$$

De ser posible, analice el comportamiento en el borde del dominio de convergencia.

4. Determine una representación en series de potencias para la función

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)}$$

y señale dónde es válida esta expresión.

4. Logarítmo complejo

1. Probar que

$$\operatorname{Arctan}(z) = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)$$

para todo $z \in \overline{D}(0,1) \setminus \{\pm i\}$.

2. Probar que para todo $z \in D(0,1)$ se tiene que

$$\operatorname{Arcsin}(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

3. Sea $\Omega_0 := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\leq 0}$. Sean $z, w \in \Omega_0$ tales que $zw \in \Omega_0$. Probar que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\operatorname{Ln}(zw) = \operatorname{Ln}(z) + \operatorname{Ln}(w) + 2\pi i k.$$

4. Probar que $\operatorname{Ln}(e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}}) = \operatorname{Ln}(e^{i\frac{\pi}{2}}) + \operatorname{Ln}(e^{i\frac{3\pi}{4}}) - 2\pi i$.

5. Diferenciabilidad y Ecuaciones de Cauchy-Riemann

1. Probar que las derivadas holomorfas y anti-holomorfas, $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$, verifican la relación

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} \qquad \text{y} \qquad \overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}.$$

2. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por el polinomio homogéneo de grado 3

$$f(x+iy) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3,$$

para ciertos $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Determinar para qué valores de $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ la función f es holomorfa. *Indicación: Considerar* $x = (z + \overline{z})/2$ *e* $y = (z - \overline{z})/2i$.

6. Operador Laplaciano y funciones armónicas

En esta sección, se podrá asumir el hecho que toda función holomorfa es de clase $\mathscr{C}^\infty$.

1. Sea $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función armónica en Ω. Probar que la función

$$f(x+iy) := \frac{\partial u}{\partial z}(x,y)$$

es holomorfa en $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.

2. Sea $f \in \mathscr{O}^*(\Omega)$ (i.e., f es holomorfa y $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$), y sea $u := \ln |f|$. Calcular (por definición) Δu y verificar que u es armónica.

7. Integración de 1-formas y Teorema de Green

1. Un **agujero** de un compacto $K \subseteq \mathbb{R}^2$ es una componente conexa acotada del complemento $\mathbb{R}^2 \setminus K$. Probar que si K tiene borde de clase $\mathscr{C}^1$ por pedazos, entonces K posee a lo más un número finito de agujeros.
   Indicación: Cada agujero está bordeado por parametrizaciones locales del borde $u \mapsto (u, h(u))$.

2. Probar el Teorema de Green,
$$\int_{\partial K} \omega = \iint_K \mathrm{d}\omega,$$
mediante la siguiente estrategia:

   (a) Probar que el compacto $K \subseteq \mathbb{R}^2$ puede ser cubierto por **finitos** rectángulos abiertos R_j tales que $\partial K \cap R_j = \emptyset$ (i.e., $R_j \subseteq \mathrm{int}(K)$) o bien $\partial K \cap R_j$ es el grafo de una función h_j de clase $\mathscr{C}^1$ por pedazos.

   En lo que sigue, podrá utilizar sin demostración el hecho que K posee una *partición de la unidad diferenciable* subordinada al cubrimiento por los abiertos $R_1, \ldots, R_N$ hallados en el punto (a), i.e.,

   > Existen finitas funciones $\rho_1, \ldots, \rho_N$ diferenciables, con $\rho(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$, tales que su *soporte*
   > $$\mathrm{supp}(\rho_j) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \rho_j(x) \neq 0\}} \subseteq \mathbb{R}^2$$
   > está contenido en el rectángulo abierto R_j, y tales que $\rho_1(x) + \cdots + \rho_N(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

   En particular, $\rho_j = 0$ en los puntos de ∂R_j.

   (b) Deducir que $\omega = \sum_{j=1}^N \omega_j$ donde cada ω_j es una 1-forma de clase $\mathscr{C}^1$ cuyo *soporte* (i.e., la clausura de los puntos donde ω_j **no** se anula) está contenido en R_j. Deducir que basta probar que $\int_{\partial K} \omega_j = \iint_K \mathrm{d}\omega_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, N\}$.

   En lo que sigue, suponer que $R = R_j$ es uno de los rectángulos hallados en el punto (a) y que, luego de un cambio de coordenadas, está dado por $R =]-\varepsilon, \varepsilon[\times]-\delta, \delta[$.

   (c) Verificar, en el caso en que $R \subseteq \mathrm{int}(K)$, que $\int_{\partial R} \omega = \iint_R \mathrm{d}\omega$.

   (d) Verificar, en el caso en que $K \cap R = \{(x, y) \in R \text{ tal que } y > h(x)\}$, que $\int_{\partial R} \omega = \iint_R \mathrm{d}\omega$.
   Indicación: Si $\omega = u(x, y)\ \mathrm{d}x + v(x, y)\ \mathrm{d}y$, probar (por definición y usando el teorema de Fubini) que ambas integrales valen $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} v(x, h(x))h'(x) + u(x, h(x))\ \mathrm{d}x$

   (e) Deducir el Teorema de Green.

8. Teorema de Cauchy-Goursat y Formulas de Cauchy-Pompeiu

1. Sea T el triángulo que conecta los puntos $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ y $z_3 = i$, orientado en sentido anti-horario. Encontrar una parametrización de γ, y calcular (por definición) que
$$\int_T (z^2 + 1)\ \mathrm{d}z = 0.$$

2. Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ un compacto con borde orientado de clase $\mathscr{C}^1$ por pedazos. Probar, usando el Teorema de Green, que para toda función $f : K \to \mathbb{C}$ de clase $\mathscr{C}^1$ se tiene
$$\int_{\partial K} f(z)\ \mathrm{d}z = 2i \iint_K \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

9. Diferenciabilidad de funciones holomorfas y Teorema de Morera

1. Sea $a \in \mathbb{R}^{>0}$. Calcular la integral impropia
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

2. Calcular la integral impropia
$$I = \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x.$$
Para ello, considere la integral de la función $f(z) = e^{-z^2}$ sobre el borde ∂K_R del compacto
$$K_R := \{z = re^{i\theta} \text{ tal que } 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le \pi/4\}.$$
Indicación: Puede utilizar que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *y que* $\sin(t) \ge 2t/\pi$ *para todo* $t \in [0, \pi/2]$.

10. Desigualdad de Cauchy y Teorema de Liouville

1. Sea $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ una función entera, y sea $u : \mathbb{C} \cong \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función armónica $u := \mathrm{Re}(f)$. Probar que si u está acotada superiormente (i.e., existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $u(x,y) \le M$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$), entonces u es una función *constante*.
Indicación: Considerar la función $g(z) := e^{f(z)}$.

2. Sea $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ una función holomorfa, y $r \in]0,1[$. Supongamos que existe $z_0 \in D(0,r)$ tal que $f(z_0) = 0$. Probar que
$$|z_0| \ge \frac{r|f(0)|}{M + |f(0)|},$$
donde $M := \sup_{\partial D(0,r)} |f(z)|$.
Indicación: Considerar la fórmula de Cauchy en $z = 0$ *y en* $z = z_0$.

3. Sea $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ una función entera y sean $a, b \in \mathbb{C}$ dos complejos $\mathbb{R}$-linealmente independientes. Probar que si $f(z + ma + nb) = f(z)$ para todos $m, n \in \mathbb{Z}$ y todo $z \in \mathbb{C}$ (i.e., f es *doblemente periódica*) entonces f es constante.

11. Funciones analíticas

1. Probar que si $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$-analítica, entonces es $\mathbb{R}$-analítica.
Indicación: Notar que $(z - z_0)^n = ((x - x_0) + i(y - y_0))^n$ *y usar la fórmula del binomio de Newton.*

2. Probar que la función $f(z) = \overline{z}$ es $\mathbb{R}$-analítica, pero **no** es $\mathbb{C}$-analítica.

12. Ceros de funciones holomorfas

1. Determinar el orden de todos los ceros de la función $\mathrm{Ln}(z)$.

2. Determinar el orden de todos los ceros de las funciones $\sin(z)$, $\cos(z)$ y $\tan(z)$.

13. Extensión analítica

1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo no-vacío, y sean $f, g \in \mathscr{O}(\Omega)$. Supongamos que existen sucesiones $\{z_n\}_{n\ge0}$, $\{w_n\}_{n\ge0} \subseteq \Omega$ de elementos diferentes, convergentes en Ω, y tales que $(f - g)(z_n) = 0$ y $(f + 2g)(w_n) = 0$ para todo $n \ge 0$. Probar que $f = g = 0$ en Ω.

2. Sea $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ una función entera tal que $f(\frac{1}{n}) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^{\ge1}$. Probar que f es idénticamente nula.

14. Teorema de la aplicación abierta

1. Sea $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ una función no-constante. Probar que el conjunto de puntos críticos de f (resp. regulares) es un conjunto cerrado formado por puntos aislados en Ω (resp. un abierto denso de Ω).

2. Analizar el comportamiento local de $f(z) = \sin^3(z^2)$ en una vecindad del punto crítico $z_0 = 0$.

15. Principio del máximo y Lema de Schwarz

1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no-vacío, y sea $f \in \mathscr{O}^*(\Omega)$. Probar que si $|f|$ alcanza su mínimo en Ω, entonces f es constante.

2. Sea $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z| < 1\}$ el disco unitario, y sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una función holomorfa tal que $f(0) = 0$. Probar que $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y que $|f'(0)| \leq 1$.

3. Sea $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \operatorname{Im}(z) > 0\}$ el semi-plano de Poincaré. Probar que

$$f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{H},\ z \longmapsto i\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$$

   está bien definida y es un biholomorfismo.

16. Convergencia de funciones holomorfas, derivación bajo el signo integral, Función Γ

1. Sea $\sum f_n$ una serie de funciones holomorfas, con $f_n \in \mathscr{O}(\Omega)$ para todo n. Supongamos que $\sum f_n$ converge uniformemente en todo compacto de Ω a la función $F = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Probar que $F \in \mathscr{O}(\Omega)$ y que para todo $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $F^{(m)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(m)}$.

2. Probar que la función $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$F(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t^3} \cos(tz)\ \mathrm{d}t$$

   es una función entera.
   Indicación: Probar que para todo $z \in D(0, R)$ se tiene que $|e^{-t^3}\cos(tz)| \leq e^{Rt-t^3}$.

3. Para todo $n \in \mathbb{N}$, calcular el límite

$$\lim_{z \to -n} (z+n)\Gamma(z).$$

4. Admitiendo el hecho (sin demostración) que $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$ para todo $z \notin \mathbb{Z}$, calcular el valor de la integral

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(x)}\ \mathrm{d}x.$$