Tarea 1 (MAT214)

Pedro Montero
pedro.montero@usm.cl

Problema 1 (15 puntos)

El objetivo de este problema es verificar que un sub-grupo de un grupo finitamente generado no es necesariamente finitamente generado [1].

1. Demostrar que un grupo finitamente generado es numerable [2].
2. Demostrar que $(\mathbb{Q}, +)$ no es finitamente generado.
3. Demostrar que el grupo de matrices triangulares superiores en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ cuyos coeficientes en la diagonal son todos iguales a 1 es isomorfo a $(\mathbb{Q}, +)$.
4. Sea G el grupo (finitamente generado) de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ generado por las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Demostrar que el sub-grupo H de G formado por los elementos de G cuyos coeficientes en la diagonal son todos iguales a 1 no es de tipo finito. [*Indicación : Calcular $A^{-n}BA^n$ y usar un argumento similar a (2)*]

Problema 2 (20 puntos)

El objetivo de este problema es resolver algunos de los ejercicios propuestos en clases.

1. Sea k un cuerpo. Mostrar que $Z(\mathrm{GL}_n(k))$ consiste en los múltiplos no-nulos de la matriz identidad.
2. Sea p un número primo. Calcular el cardinal de los grupos $\mathrm{GL}(\mathbb{F}_p)$ y $\mathrm{SL}(\mathbb{F}_p)$.
3. Mostrar que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ actúa sobre el semi-plano de Poincaré
$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$$
mediante $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z := \dfrac{az+b}{cz+d}$.
4. Calcular el orden de todos los elementos del grupo alternante A_4.
5. Sea p un número primo. Demostrar que el subgrupo $T_n(\mathbb{F}_p)$ de matrices unipotentes (i.e., matrices triangulares superiores en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ cuyos coeficientes en la diagonal son todos iguales a 1) es un $p-$subgrupo de Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.
6. Calcular los factores invariantes de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.
7. Probar que el grupo alternante A_5 consiste exactamente en la identidad, las dobles transposiciones, los 3-ciclos y los 5-ciclos.
8. Probar que $\mathbb{Z}$ no admite una serie de composición.

Problema 3 (15 puntos)

Sea $n \geq 2$ un número natural. Utilizando el teorema de Jordan-Hölder y el teorema chino del resto al grupo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, demostrar que :

1. El número n admite una escritura como producto de números primos.
2. Dicha escritura es única módulo permutación de los factores.

Problema 4 (15 puntos)

El objetivo de este problema es considerar algunos ejemplos concretos de grupos abelianos finitamente generados.

1. Descomponer el grupo $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/187\mathbb{Z}$ y el grupo de unidades $G^\times = \mathbb{Z}^\times \times (\mathbb{Z}/187\mathbb{Z})^\times$ en la forma dada por el teorema de estructura de grupos abelianos finitamente generados.
2. Considerar $H = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a - b \text{ es divisible por } 10\}$. Probar que H es un sub-grupo de $\mathbb{Z}^2$, calcular su rango, dar una base, y calcular el cociente $\mathbb{Z}^2/H$. [*Indicación : Para calcular $\mathbb{Z}^2/H$ hallar una base adaptada de $\mathbb{Z}^2$.*]
3. Sea $n \geq 1$. Construir en $\mathbb{R}$ un sub-grupo isomorfo a $\mathbb{Z}^n$. [*Indicación : Considerar el sub-grupo aditivo generado por $\log(p_1), \ldots, \log(p_n)$ donde los p_i son números primos distintos.*]

1. Sabemos que esto si es cierto en el caso de grupos **abelianos** finitamente generados.
2. Recordemos que un conjunto es numerable si tiene la misma cardinalidad de un sub-conjunto de $\mathbb{N}$.

Problema 5 (15 puntos)

El objetivo de este problema es estudiar en detalle las propiedades del **producto semi-directo**, definido de la manera siguiente : Sean G y H dos grupos y sea $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(G)$ un morfismo de grupos. Denotamos $G \rtimes_\varphi H$ al conjunto $G \times H$ dotado de la ley de composición interna definida por $(g_1, h_1) \rtimes_\varphi (g_2, h_2) = (g_1 \cdot \varphi(h_1)(g_2), h_1 h_2)$.

1. Demostrar que $G \rtimes_\varphi H$ es un grupo, llamado el producto semi-directo de H por G respecto a φ.
2. Probar que $G \times \{e_H\} \trianglelefteq G \rtimes_\varphi H$ y que $\{e_G\} \times H \leq G \rtimes_\varphi H$.
3. Probar que el cociente de $G \rtimes_\varphi H$ por $G \times \{e_H\}$ es isomorfo a H.
4. Probar que $G \rtimes_\varphi H \cong G \times H$ si y sólo si el morfismo φ es trivial, si y sólo si $\{e_G\} \times H \trianglelefteq G \rtimes_\varphi H$
5. Supongamos que G es un grupo y N y H son sub-grupos de G tales que $N \cap H = \{e\}$, $NH = G$ y $N \trianglelefteq G$. Mostrar que la aplicación $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ dada por $h \mapsto \varphi_h$, con $\varphi_h(n) = hnh^{-1}$, es un morfismo de grupos. Probar además que en este caso la aplicación $f : N \rtimes_\varphi H \to G$ dada por $f(n,h) = nh$ es un isomorfismo.
6. Usar el punto anterior para probar que para el grupo diedral se tiene que[3] $D_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. [*Indicación : Considerar* $\langle r \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *y* $\langle s \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.]

Problema 6 (20 puntos)

El objetivo de este problema es clasificar todos los grupos finitos de orden menor o igual a 11.

1. Sea q un número primo. Probar que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$.
2. Sean p y q números primos tales que $p < q$, y sea G un grupo de orden pq. Usar el punto anterior y el teorema de Sylow para probar que :
   (a) Si $p \nmid (q-1)$ entonces $G \cong \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.
   (b) Si $p \mid (q-1)$ y G es abeliano entonces $G \cong \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.
   (c) Si $p \mid (q-1)$ y G no es abeliano entonces $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.
3. Clasificar todos los grupos G de orden $|G| \in \{1,2,3,4,5,6,7,9,10,11\}$. Además, clasificar todos los grupos abelianos de orden 8.
4. Sea p un número primo. Sea G un grupo no-abeliano de orden p^3. Probar que $|Z(G)| = p$ y $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. [*Indicación : Sabemos que si* $G/Z(G)$ *es cíclico entonces* G *es abeliano.*]
5. Sea G un grupo no-abeliano de orden 8.
   (a) Demostrar que G admite un elemento $r \in G$ de orden 4. [*Indicación : Sabemos que un grupo tal que todos sus elementos tienen orden 2 es abeliano.*]
   (b) Sea $s \in G \setminus \langle r \rangle$ un elemento de orden minimal, donde $r \in G$ es un elemento de orden 4. Probar, usando el Problema 5.6, que si s es de orden 2 entonces $G \cong D_4$.
   (c) Sea $s \in G \setminus \langle r \rangle$ un elemento de orden minimal, donde $r \in G$ es un elemento de orden 4. Supongamos que s es de orden 4 y renombremos $i := r$, $j := s$ y definamos $k := ij$. Deducir que i^2 y j^2 tiene orden 2 y luego $i^2 = j^2 = z$, donde $Z(G) = \{e, z\}$. Probar que $\langle i \rangle$ y $\langle j \rangle$ son normales en G y que $iji^{-1} \in \langle j \rangle$ implica necesariamente que $k = ij = j^3 i = zji$ y por ende $k^2 = z$. El grupo G obtenido de esta manera es llamado el **grupo de cuaterniones** y es denotado $\mathbf{H}_8$. Si denotamos $e := 1$ y $z := -1$, entonces $\mathbf{H}_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$. Finalmente, usando esta notación, calcular los productos i^2, j^2, k^2, ij, ji, jk, kj, ki, ik y ijk.

3. En este caso, escribimos $G \rtimes H$ en lugar de $G \rtimes_\varphi H$ si existe algún $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(G)$ morfismo no trivial.