Ayudantía 5 Estructuras Algebraicas MAT214

Universidad Técnica Federico Santa María

8 de abril de 2019

1. Sea $G = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ y para cada i sea B_i un subgrupo normal de A_i. Pruebe que $B_1 \times \cdots \times B_n \trianglelefteq G$ y que

$$(A_1 \times \cdots \times A_n)/(B_1 \times \cdots \times B_n) \cong (A_1/B_1) \times (A_n/B_n)$$

2. Sea G es isomorfo a $\prod_{i=1}^{t} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ con $n_i | n_{i+1}$. Pruebe que G contiene un elemento de orden m si y solamente si $m|n_t$. Deduzca que G es de exponente n_t.

3. Muestre que un grupo abeliano finito que no es cíclico contiene un subgrupo que es isomorfo a $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ para algún número primo p.

4. Sea p un número primo y sea $A = \langle x_1 \rangle \times \cdots \times \langle x_n \rangle$ un p-grupo abeliano donde $|x_i| = p^{\alpha_i} > 1$ para todo i. Definiendo la función $p-$potencia.

$$\begin{aligned} \phi : A &\to A \\ x &\to \phi(x) = x^p \end{aligned}$$

   a) Pruebe que ϕ es un homomorfismo.
   b) Describa la imagen y el kernel de ϕ en término de los generadores dados.
   c) Pruebe que $\ker(\phi)$ y $A/\mathrm{im}(\phi)$ tienen rango n. Pruebe que ambos grupos son isomorfos al grupo abeliano $E_{p^n} = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ de orden p^n.

5. Sea A un grupo abeliano y $T(A) = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}\ na = 0\}$. Entonces el grupo de torsión de $A/T(A)$ es el trivial. De un ejemplo de un grupo abeliano en el cual su grupo de torsión no sea necesariamente finito.

6. Sea $A = \mathbb{Z}/60\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/45\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$. Encuentre el número de elementos de orden 2 y el número de subgrupos de índice 2 en A.