

Ayudantía 4 Estructuras Algebraicas

MAT214

Universidad Técnica Federico Santa María

1 de abril de 2019

1. Sea un grupo G actuando sobre un conjunto X . Pruebe que si $a, b \in X$, y $b = g \cdot a$ para algún $g \in G$, entonces $G_b = gG_ag^{-1}$. Deduzca que si la acción es transitiva, entonces el kernel de la acción es $\bigcap_{g \in G} gG_ag^{-1}$.

2. Sea $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ y sea $G = SL_2(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}$$

es una acción de grupo. Encuentre el estabilizador de i .

3. ¿Cuántos elementos de orden 7 deben haber en un grupo simple de orden 168?
4. Demostrar que no existen grupos simples de orden pq con p, q primos.
5. Sea P un p -subgrupo de Sylow normal en G y sea $H \leq G$. Pruebe que $P \cap H$ es el único p -subgrupo de Sylow de H .
6. Sea $|G| = pqr$ con p, r, q número primos distintos, entonces el grupo es no simple. Suponga por contradicción que el grupo es simple, luego:
 - a) Demuestre que $n_r = pq$.
 - b) Demuestre que $n_q = r$.
 - c) Demuestre que $n_p \geq q$ y concluya.