Ayudantía 3 Estructuras Algebraicas MAT214

Universidad Técnica Federico Santa María

25 de marzo de 2019

1. *a)* Sea $N \trianglelefteq G$ y H cualquier subgrupo de G, entonces $H \cap N \trianglelefteq H$.

   b) Sea $H \leq G$ y N sugrpo normal en H, entonces $H \leq N_G(N)$ y deduzca que $N_G(N)$ es el subgrupo de G más grande en el cual N es normal.

2. Mediante el primer teorema del isomorfismo demuestre que[1] si V_1, V_2 son subespacios vectoriales de dimensión finita del espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, entonces

$$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$$

3. Sean H y K subgrupos de G con $H \trianglelefteq G$. Muestre que $HK := \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ es un subgrupo de G, que $HK = KH = HKH$, que $H \cap K$ es normal en K y que los grupos $(HK)/H$ y $K/(H \cap K)$ son isomorfos.

4. Sea H y K dos subgrupos finitos de un grupo G donde uno de ellos es normal. Demuestre que

$$|H| \cdot |K| = |HK| \cdot |H \cap K|$$

5. Sea G un grupo finito, sea H un subgrupo de G y sea $N \trianglelefteq G$. Pruebe que si $|H|$ y $|G : N|$ son primos relativos, entonces $H \leq N$.

6. Pruebe que si N es un subgrupo normal de un grupo finito G y $|N|$ con $|G : N|$ son coprimos entonces N es el único subgrupo de G con orden $|N|$

7. Sean H y K subgrupos normales de G con $K \leq H$. Muestre que H/K es normal en G/K y $(G/K)/(H/K) \cong (G/H)$.

[1] Asuma que si W es subespacio vectorial de V (de dimensión finita) sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ entonces $\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$