Ayudantía 2 Estructuras Algebraicas MAT214

Universidad Técnica Federico Santa María

18 de marzo de 2019

1. Sea $f : G \to G'$ un morfismo sobreyectivo. Demuestre que si G es abeliano, entonces G' es abeliano y que si G es cíclico entonces G' es cíclico.

2. Sea G un grupo finito tal que existe p primo que divide a $|G|$, demuestre que existe un elemento en G de orden p. Para demostrar esto, se define a $\mathcal{S}$ como el conjunto:

$$\mathcal{S} = \{(x_1, \cdots, x_p) \mid x_i \in G \text{ y } x_1 x_2 \cdots x_p = e\}$$

   a) Muestre que $\mathcal{S}$ tiene $|G|^{p-1}$ elementos.
   Defina la relación $\sim$ en $\mathcal{S}$ como $a \sim b \iff b$ es una permutación cíclica de a.

   b) Pruebe que la permutación cíclica de un elemento de $\mathcal{S}$ sigue estando en $\mathcal{S}$.

   c) Pruebe que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{S}$.

   d) Pruebe que una clase de equivalencia contiene un único elemento si y solamente si es de la forma $(x, \cdots, x)$ con $x^p = e$.

   e) Pruebe que cada clase de equivalencia tiene orden 1 o p. Deduzca que $|G|^{p-1} = k + pd$, donde k es el número de clases de tamaño 1 y d es el número de clases de tamaño p.

   f) Dado que $\{(e, \cdots, e)\}$ es una clase de equivalencia, por el enunciado (e) concluya que debe haber un elemento $x \in G$ distinto de e tal que $x^p = e$.

3. Usando el Teorema de Lagrange en el grupo multiplicativo $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ demuestre que si p es un número primo, entonces $a^p \equiv a(\text{mod p})$ para todo $a \in \mathbb{Z}$.

4. *a*) Pruebe que si $G/Z(G)$ es cíclico entonces G es abeliano. (Si $G/Z(G)$ es cíclico con generador $xZ(G)$ para algún $x \in G$, muestre que cada elemento de G se puede escribir de la forma $x^a z$ con $a \in \mathbb{Z}$ y $z \in Z(G)$).

   b) Muestre que si $|G| = pq$ con p y q primos, entonces G es abeliano o $Z(G) = \{e\}$. (ocupe a))

5. Pruebe que si H y K son subgrupos de G cuyos órdenes son relativamente primos, entonces $H \cap K = \{e\}$.