Tarea 3 – Estructuras Algebraicas

Profesor: Pedro Montero, Ayudante: Mateo Hidalgo

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Fecha de entrega:[1] Hasta el Viernes 5 de Julio de 2024 a las 23h59.

Esta Tarea puede ser realizada en grupos de 1 o 2 personas, y se debe indicar el **nombre de cada integrante**.

Debe **escoger sólamente <u>dos</u> problemas** (entre A, B o C) para resolver. Excepcionalmente, es posible realizar la tarea en grupos de 3 personas, pero en tal caso deben realizar **<u>todos</u>** los problemas (A, B y C).

Siempre denotaremos por A un anillo conmutativo con unidad no-nulo y por k un cuerpo.

Problema A (50 pts)

El objetivo de este problema es caracterizar los $\mathbb{Z}$-módulos inyectivos. Para ello, recordar que un $\mathbb{Z}$-módulo es lo mismo que un grupo abeliano. En este contexto, y utilizando la notación aditiva, decimos que un grupo abeliano G es **divisible** si para todo $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ el morfismo

$$G \xrightarrow{\cdot n} G, \ x \mapsto nx$$

es sobreyectivo. En otras palabras, para todo $y \in G$ y todo $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, existe $x \in G$ tal que $y = nx$.

Además, recordemos el **criterio de Baer** que podrá ser utilizado directamente sin demostración[2]:

> Sea A un anillo y M un A-módulo. Entonces, M es un A-módulo inyectivo si y sólo si para todo ideal $I \subseteq A$ y todo morfismo de A-módulos $\varphi : I \to M$, existe $\Phi : A \to M$ morfismo de A-módulos tal que $\Phi|_I = \varphi$ (i.e., Φ extiende a φ).

Utilizando lo anterior, responda justificadamente las siguientes preguntas.

1. **(10 pts)** Probar que los grupos abelianos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son divisibles.
2. **(10 pts)** Utilizar el criterio de Baer para probar que $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.
3. **(15 pts)** Probar que todo $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo es divisible.

   Indicación: Considerar el morfismo inyectivo $\gamma : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}, \ a \mapsto an$, con $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ fijo.
4. **(15 pts)** Utilizar el criterio de Baer para probar que si G es un grupo abeliano divisible, entonces G es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.

Problema B (50 pts)

El objetivo de este problema es estudiar una generalización importante del anillo de enteros $\mathbb{Z}$. Para esto, consideremos A un anillo y B una A-álgebra con morfismo estructural $\varphi : A \to B$. En particular, decimos que B es una **extensión** (de anillos) de A si φ es inyectiva, y en cuyo caso escribiremos símplemente $A \hookrightarrow B$ y $ab := \varphi(a)b$ para todos $a \in A$ y $b \in B$.

Sea $A \hookrightarrow B$ una extensión de anillos y sea $x \in B$. Decimos que x es **entero** sobre A si existe $P \in A[X]$ polinomio con coeficiente principal 1 tal que $P(x) = 0$. Explícitamente,

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (\star)$$

para cierto $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y ciertos $a_i \in A$. Decimos que B es **entero** sobre A si todo elemento de B es entero sobre A.

Más aún, puede utilizar directamente el siguiente hecho sobre módulos finitamente generados:

> Sea $A \hookrightarrow B$ (resp. $B \hookrightarrow C$) una extensión de anillos tal que B es un A-módulo finitamente generado (resp. C es un B-módulo finitamente generado), y sea $\{b_1, \dots, b_n\} \subseteq B$ (resp. $\{c_1, \dots, c_m\} \subseteq C$) una familia generadora. Entonces C es un A-módulo finitamente generado, y $\{b_i c_j\}_{i \in \{1,\dots,n\},\, j \in \{1,\dots,m\}}$ es una familia generadora.

Utilizando lo anterior, responda justificadamente las siguientes preguntas.

[1] Factor de retraso: 0.7 por 1 día de retraso, 0.55 por 2 días de retraso, 0.01 por 3 días de retraso.

[2] La prueba pasa por una aplicación conveniente del Lema de Zorn.

1. **(10 pts)** Consideremos la extensión de anillos $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$. Probar que $x \in \mathbb{Q}$ es entero sobre $\mathbb{Z}$ si y sólo si $x \in \mathbb{Z}$.
2. **(10 pts)** Sea $A \hookrightarrow B$ una extensión de anillos y sea $S \subseteq A$ un subconjunto multiplicativo. Probar que si B es entero sobre A, entonces $S^{-1}B$ es entero sobre $S^{-1}A$.
3. **(15 pts)** Sea $A \hookrightarrow B$ una extensión de anillos, y sea $x \in B$. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes:
   (a) $x \in B$ es entero sobre A.
   (b) $A[x] \overset{\text{def}}{=} \{P(x),\ P \in A[T]\}$ es un A-módulo finitamente generado.
   (c) Existe una A-álgebra C tal que C es un A-módulo finitamente generado y tal que $A[x] \subseteq C \subseteq B$.

   Indicación: Para probar que (a) implica (b), probar que si $x \in B$ cumple la ecuación $(\star)$ entonces $A[x]$ está generado por $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$ como A-módulo. Para probar que (c) implica (a), considerar el endomorfismo de A-módulos $\varphi : C \to C$, $m \mapsto xm$ y $P \in A[T]$ tal que $P(\varphi) = 0$ dado por el teorema de Cayley-Hamilton. Calcular $P(\varphi)(1)$.
4. **(15 pts)** Sea $A \hookrightarrow B$ una extensión de anillos. Definimos la **clausura integral** de A en B mediante
$$\overline{A} := \{x \in B \text{ tal que } x \text{ es entero sobre } A\}.$$
   Probar que $\overline{A}$ es una A-álgebra.

   Indicación: Basta probar que si $x, y \in B$ son enteros sobre A, entonces $x \pm y \in B$ y $xy \in B$ también lo son. Para esto último, probar usando (3b) que $C := A[x, y] \overset{\text{def}}{=} \{P(x, y),\ P \in A[T, S]\}$ es un A-módulo finitamente generado. Concluir mediante (3c), notando que $A[z] \subseteq C$ donde $z = x \pm y$ o $z = xy$.

Problema C (50 puntos)

El objetivo de este problema es estudiar la noción de **planitud** de A-módulos. Más precisamente, si A es un anillo conmutativo, decimos que un A-módulo M es **plano** si para toda sucesión exacta corta de A-módulos
$$0 \to N_1 \xrightarrow{\varphi} N_2 \xrightarrow{\psi} N_3 \to 0$$
la sucesión asociada
$$0 \to N_1 \otimes_A M \xrightarrow{\varphi \otimes \mathrm{Id}_M} N_2 \otimes_A M \xrightarrow{\psi \otimes \mathrm{Id}_M} N_3 \otimes_A M \to 0$$
es exacta.

1. **(10 puntos)** Probar que $M = A$ es un A-módulo plano.
2. **(15 puntos)** Sea $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ suma directa de una familia $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de A-módulos. Probar que M es un A-módulo plano si y sólo M_λ es un A-módulo plano para todo $\lambda \in \Lambda$.
3. **(10 puntos)** Probar que todo A-módulo libre no-nulo es plano. Deducir que el anillo de polinomios $A[X_1, \ldots, X_n]$ es un A-módulo plano.
4. **(15 puntos)** Sea $I \subseteq A$ un ideal. Pruebe que si $M = A/I$ es un A-módulo plano entonces $I = I^2$.

   Indicación: Considerar la inclusión $\varphi : I \hookrightarrow A$ y analizar $\varphi \otimes \mathrm{Id}_{A/I} : I \otimes_A (A/I) \to A \otimes_A (A/I)$.

Bonus (20 puntos extra, opcional)

El objetivo de este problema es estudiar más propiedades de los módulos planos sobre un anillo conmutativo A.

(B1) Sea M un A-módulo plano. Pruebe que si $I \subseteq A$ es un ideal, entonces
$$I \otimes_A M \longrightarrow IM,\ i \otimes m \longmapsto im$$
es un isomorfismo.

(B2) Sean M_1, M_2 dos A-módulos planos. Pruebe que $M_1 \otimes_A M_2$ es un A-módulo plano.