Tarea 3 Estructuras Algebraicas

Pedro Montero

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Debe **escoger sólamente <u>dos</u> problemas** (entre A, B y C) para resolver. A menos que se especifique lo contrario, denotaremos por A un anillo conmutativo con unidad no-nulo y por k un cuerpo.

Problema A (50 pts).

El objetivo de este problema es caracterizar los $\mathbb{Z}$-módulos inyectivos. Para ello, recordar que un $\mathbb{Z}$-módulo es lo mismo que un grupo abeliano.

En este contexto, y utilizando la notación aditiva, decimos que un grupo abeliano G es **divisible** si para todo $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ el morfismo

$$G \xrightarrow{\cdot n} G, \ x \mapsto nx$$

es sobreyectivo. En otras palabras, para todo $y \in G$ y todo $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, existe $x \in G$ tal que $y = nx$.

Además, recordemos el **criterio de Baer** que podrá ser utilizado directamente sin demostración[1]:

> Sea A un anillo y M un A-módulo. Entonces, M es un A-módulo inyectivo si y sólo si para todo ideal $I \subseteq A$ y todo morfismo de A-módulos $\varphi : I \to M$, existe $\Phi : A \to M$ morfismo de A-módulos tal que $\Phi|_I = \varphi$ (i.e., Φ extiende a φ).

Utilizando lo anterior, responda justificadamente las siguientes preguntas.

1. **(10 pts)** Probar que los grupos abelianos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son divisibles.
2. **(10 pts)** Utilizar el criterio de Baer para probar que $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.
3. **(15 pts)** Probar que todo $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo es divisible.
   Indicación: Considerar el morfismo inyectivo $\gamma : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$, $a \mapsto an$, con $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ fijo.
4. **(15 pts)** Utilizar el criterio de Baer para probar que si G es un grupo abeliano divisible, entonces G es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.

Problema B (50 pts).

El objetivo de este problema es estudiar una generalización importante del anillo de enteros $\mathbb{Z}$. Para esto, consideremos A un anillo y B una A-álgebra con morfismo estructural $\varphi : A \to B$. En particular, decimos que B es una **extensión** (de anillos) de A si φ es inyectiva, y en cuyo caso escribiremos símplemente $A \hookrightarrow B$ y $ab := \varphi(a)b$ para todos $a \in A$ y $b \in B$.

Sea $A \hookrightarrow B$ una extensión de anillos y sea $x \in B$. Decimos que x es **entero** sobre A si existe $P \in A[X]$ polinomio con coeficiente principal 1 tal que $P(x) = 0$. Explícitamente,

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (\star)$$

para cierto $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y ciertos $a_i \in A$. Decimos que B es **entero** sobre A si todo elemento de B es entero sobre A.

Más aún, puede utilizar directamente el siguiente hecho sobre módulos finitamente generados:

> Sea $A \hookrightarrow B$ (resp. $B \hookrightarrow C$) una extensión de anillos tal que B es un A-módulo finitamente generado (resp. C es un B-módulo finitamente generado), y sea $\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq B$ (resp. $\{c_1, \ldots, c_m\} \subseteq C$) una familia generadora. Entonces C es un A-módulo finitamente generado, y $\{b_i c_j\}_{i \in \{1,\ldots,n\},\, j \in \{1,\ldots,m\}}$ es una familia generadora.

Utilizando lo anterior, responda justificadamente las siguientes preguntas.

1. **(10 pts)** Consideremos la extensión de anillos $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$. Probar que $x \in \mathbb{Q}$ es entero sobre $\mathbb{Z}$ si y sólo si $x \in \mathbb{Z}$.
2. **(10 pts)** Sea $A \hookrightarrow B$ una extensión de anillos y sea $S \subseteq A$ un subconjunto multiplicativo. Probar que si B es entero sobre A, entonces $S^{-1}B$ es entero sobre $S^{-1}A$.

[1] La prueba pasa por una aplicación conveniente del Lema de Zorn.

3. **(15 pts)** Sea $A \hookrightarrow B$ una extensión de anillos, y sea $x \in B$. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes:

   (a) $x \in B$ es entero sobre A.

   (b) $A[x] \overset{\text{def}}{=} \{P(x),\ P \in A[T]\}$ es un A-módulo finitamente generado.

   (c) Existe una A-álgebra C tal que C es un A-módulo finitamente generado y tal que $A[x] \subseteq C \subseteq B$.

   Indicación: Para probar que (a) implica (b), probar que si $x \in B$ cumple la ecuación ($\star$) entonces $A[x]$ está generado por $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$ como A-módulo. Para probar que (c) implica (a), considerar el endomorfismo de A-módulos $\varphi : C \to C$, $m \mapsto xm$ y $P \in A[T]$ tal que $P(\varphi) = 0$ dado por el teorema de Cayley-Hamilton. Calcular $P(\varphi)(1)$.

4. **(15 pts)** Sea $A \hookrightarrow B$ una extensión de anillos. Definimos la **clausura integral** de A en B mediante

$$\overline{A} := \{x \in B \text{ tal que } x \text{ es entero sobre } A\}.$$

   Probar que $\overline{A}$ es una A-álgebra.
   Indicación: Basta probar que si $x, y \in B$ son enteros sobre A, entonces $x \pm y \in B$ y $xy \in B$ también lo son. Para esto último, probar usando (3b) que $C := A[x, y] \overset{\text{def}}{=} \{P(x, y),\ P \in A[T, S]\}$ es un A-módulo finitamente generado. Concluir mediante (3c), notando que $A[z] \subseteq C$ donde $z = x \pm y$ o $z = xy$.

Cultura general: Un cuerpo de números K es un cuerpo tal que $\mathbb{Q} \subseteq K$ y tal que K es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión finita (eg. $\mathbb{Q}(i) \cong \mathbb{Q}[X]/\langle X^2 + 1 \rangle$). Dado un cuerpo de números K, el **anillo de enteros** de K es la clausura integral de $\mathbb{Z}$ en K (i.e., los elementos $x \in K$ que verifican una ecuación polinomial de la forma $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ con $a_i \in \mathbb{Z}$), y se denota por $\mathscr{O}_K$. Es un objeto fundamental en teoría de números, y la similitud en la notación con los anillos de funciones regulares no es casualidad.

Problema C (50 pts).

El objetivo de este problema es estudiar algunas propiedades importantes de la localización de módulos. Para esto, consideremos un anillo no-nulo A y un subconjunto multiplicativo $S \subseteq A$.

1. **(10 pts)** Sea $C = V(XY) \subseteq \mathbb{A}^2$ la variedad algebraica afín dada por la unión del eje X y el eje Y en $\mathbb{A}^2$, y sea $A := \mathscr{O}(C) \cong \mathbb{C}[X, Y]/\langle XY \rangle$. Sea $p := (1, 0) \in C$ y

$$S := \{f \in \mathscr{O}(C) \mid f(p) \neq 0\}.$$

   Probar que S es un subconjunto multiplicativo de A y que los elementos $\frac{y}{1}$ y $\frac{0}{1}$ son iguales[2] en $S^{-1}A$, aquí $x = [X] \in A$ e $y = [Y] \in A$ son las clases de X e Y en el anillo cociente A.

2. **(10 pts)** Probar que la localización $S^{-1}A$ y el morfismo canónico $\iota_S : A \to S^{-1}A$, $a \mapsto \frac{a}{1}$ verifican la siguiente propiedad universal:

   > Para todo morfismo de anillos $\varphi : A \to B$ tal que $\varphi(S) \subseteq B^\times$, existe un único morfismo de anillos $\widehat{\varphi} : S^{-1}A \to B$ tal que $\widehat{\varphi} \circ \iota_S = \varphi$ (i.e., $\widehat{\varphi}(\frac{a}{1}) = \varphi(a)$ para todo $a \in A$).

   Indicación: Probar que la propiedad universal implica que necesariamente $\widehat{\varphi}(\frac{a}{s}) = \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$ (unicidad), y que dicha expresión está bien definida (existencia).

3. **(15 pts)** Sea $\varphi : M \to N$ un morfismo de A-módulos y sea $S^{-1}\varphi : S^{-1}M \to S^{-1}N$, $\frac{m}{s} \mapsto \frac{\varphi(m)}{s}$ el morfismo de $S^{-1}A$-módulos asociado. Probar que $\ker(S^{-1}\varphi) = S^{-1}\ker(\varphi)$ y que $\mathrm{Im}(S^{-1}\varphi) = S^{-1}\mathrm{Im}(\varphi)$.
   Indicación: Considerar la sucesión exacta corta asociada a φ que involucra $\ker(\varphi)$, M e $\mathrm{Im}(\varphi)$.

4. **(15 pts)** Sea M un A-módulo. Probar que si $M_{\mathfrak{m}} = 0$ para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subseteq M$, entonces $M = 0$.
   Indicación: Asumir que $M \neq 0$ y considerar $m \in M$ no-nulo. Probar que

$$\mathrm{ann}(m) := \{a \in A \text{ tal que } am = 0\}$$

   es un ideal propio de A, y que existe $\mathfrak{m}$ ideal maximal tal que $\mathrm{ann}(m) \subseteq \mathfrak{m}$ y tal que $M_{\mathfrak{m}} \neq 0$.

[2] Observación: La importancia de este ejercicio es ratificar algebraicamente la intuición de que la función y y la función 0 coinciden en una vecindad de $p = (1, 0)$ en C. Además, muestra porqué es necesario incluir la multiplicación por un elemento $t \in S$ en la relación de equivalencia que define $S^{-1}A$.

Bonus (12 puntos): El objetivo de este problema es probar que todo $\mathbb{Z}$-módulo puede ser visto dentro de un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo. Para esto, puede usar demostración el hecho que:

(a) Un $\mathbb{Z}$-módulo G es inyectivo si y sólo si G es un grupo abeliano divisible (ver Problema A).

(b) Todo grupo abeliano G es cociente de un grupo abeliano libre L (no necesariamente finitamente generado). Explícitamente, podemos considerar $L := \mathbb{Z}^{(G)}$ como la suma directa de $|G|$ copias de $\mathbb{Z}$ y $L \twoheadrightarrow G$, $e_g \mapsto g$, donde $\{(e_g)\}_{g\in G}$ denota la base canónica de $\mathbb{Z}^{(G)}$.

(c) Si G es un grupo abeliano y Λ un conjunto, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{(\Lambda)}, G) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G \overset{\mathsf{def}}{=} G^{(\Lambda)}$.

Utilizando lo anterior, responda justificadamente las siguientes preguntas.

(i) Probar que si G es un grupo abeliano divisible y $H \subseteq G$ un subgrupo, entonces G/H es un grupo abeliano divisible. En particular, cocientes de $\mathbb{Z}$-módulos inyectivos también son inyectivos.

(ii) Sea $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia arbitraria de $\mathbb{Z}$-módulos inyectivos. Probar que $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo. *Indicación: Usar el criterio de Baer. Notar que si $I_n = \langle n\rangle \subseteq \mathbb{Z}$ y $\varphi : I_n \to \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ es un morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos, entonces $\mathrm{Im}(\varphi) \cap M_\lambda \neq \{0\}$ sólo para un número finito de $\lambda \in \Lambda$.*

(iii) Sea G un grupo abeliano no-nulo arbitrario, y definamos $\check{G} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, y consideremos la aplicación $\mathbb{Z}$-bilineal

$$\check{G} \times G \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},\ (f, x) \mapsto f(x).$$

Probar que el morfismo $G \to \check{\check{G}}$, $x \mapsto \mathrm{ev}_x$ es inyectivo, donde $\mathrm{ev}_x(f) := f(x)$ para todo $f \in \check{G}$. *Indicación: Sea $x_0 \in G$ no-nulo. Probar que existe un morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $f_0 : \langle x_0\rangle_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $f_0(x_0) \neq 0$ y deducir, usando el hecho que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es divisible, que existe $f : G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $f(x_0) \neq 0$.*

(iv) Probar que para todo grupo abeliano G existe un grupo abeliano M que es inyectivo como $\mathbb{Z}$-módulo y tal que $G \hookrightarrow M$ puede ser visto como un sub-grupo. *Indicación: Probar que si L es un grupo abeliano libre y $L \twoheadrightarrow \check{G}$ es un morfismo sobreyectivo, entonces $\check{\check{G}} \hookrightarrow \check{L}$ es un morfismo inyectivo. Usar (ii) para deducir que $\check{L}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo, y concluir usando (iii). Otra alternativa es concluir utilizando (i) y (ii).*