Bienvenid@s a MAT214 (Estructuras Algebraicas):

Contenidos :

Parte I : Teoría de grupos
- a) Propiedades y clasificación de grupos finitos
- b) Teoría de Representaciones

Parte II : Teoría de anillos
- a) Anillos y sus ideales
- b) módulos sobre un anillo.

* **Tópicos adicionales** : Curvas (algebraicas) planas

<u>Parte I</u>: Un grupo G es un conjunto $\neq \emptyset$ junto con una operación $\cdot : G \times G \to G$ que es asociativa, $\exists$ neutro, $\exists$ inversos.

$$(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$$

$\rightsquigarrow$ Ustedes ya conocen MUCHOS ejemplos!

¡Representaciones!

Principales preguntas:

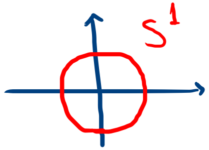
(?) ¿Cómo producir nuevos grupos?

(?) ¿Cómo clasificar los grupos finitos? $\rightsquigarrow$ "LOS GRUPOS ESTÁN HECHOS PARA ACTUAR" Pierre Colmez

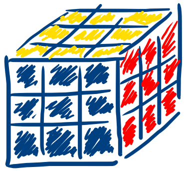
(?) ¿Qué pasa si G conmutativo? $\rightsquigarrow$ "Basta" clasificar GRUPOS SIMPLES

<u>Obs</u>: Necesitaremos definir / recordar la noción de producto tensorial!

Ejemplos: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{C}^* \underset{\text{def}}{=} \mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$, $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| = 1 \}$



Cubo Rubik

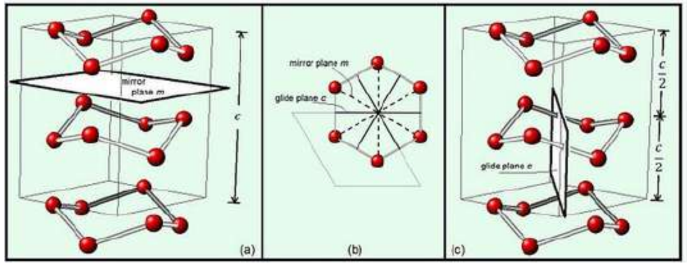


$\rightsquigarrow$ G grupo de simetrías (cardinal: $2^{27}\, 3^{14}\, 5^3\, 7^2\, 11$)

$\hookrightarrow$ Pero bastan 20 movimientos para resolverlo (2010)!

Química: Simetría de partículas / cristales

"Grupos cristalográficos"



$\leftarrow H_2O$ (hielo)

En cualquier caso, es de utilidad REPRESENTAR grupos usando matrices.

Eg.: $G = S_n \rightsquigarrow$ Matrices de permutación $n \times n$ $\curvearrowright V = \mathbb{C}^n$

⚠ Los subesp. $L = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(1, \dots, 1)$ y $H = \{ x_1 + \dots + x_n = 0 \}$ son INVARIANTES

Parte II: Un anillo A es un conjunto $\neq \emptyset$ junto con dos operaciones

$$+ : A \times A \longrightarrow A \qquad y \qquad \cdot : A \times A \longrightarrow A$$
$$(a,b) \longmapsto a+b \qquad\qquad (a,b) \longmapsto ab$$

ambas conmutativas* y tq $\exists$ neutros $\rightsquigarrow$ 0 y 1.

$\exists$ inverso aditivo y hay distributividad.

$\rightsquigarrow$ Nuevamente, ya conocen MUCHOS ejemplos!

Principales preguntas:

? ¿Cómo producir nuevos anillos? $\rightsquigarrow$ "Ideales" $\rightsquigarrow$ ¡Geometría! (David Hilbert)

? ¿Qué cambia si en un espacio vectorial reemplazamos el cuerpo de escalares por un anillo? $\rightsquigarrow$ "Módulos"

?* ¿Cómo podemos usar lo anterior para estudiar curvas en el plano?

Ejemplos: $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\cdot)$

Nos concentraremos en anillos conmutativos $\rightsquigarrow$ "ÁLGEBRA CONMUTATIVA"

↳ Salvo por los anillos de matrices

Kummer & Dedekind ($\approx$ 1880): Introducen el concepto de IDEAL.

↳ Eg. En $A = \mathbb{R}[x]$, $I = \langle x^2+1 \rangle \overset{\text{def}}{=} \{ p(x)(x^2+1), \ p \in \mathbb{R}[x] \}$

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{C} := \mathbb{R}[x] / \langle x^2+1 \rangle$ anillo cociente

MÓDULOS: M "esp. vectorial sobre un anillo"

↳ Eg. $A = \mathcal{C}^\infty([0,1])$ y $M = L^2([0,1]) = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ tq } \int_0^1 f(x)^2 \, dx < +\infty \}$

(Hay muchos ejemplos motivados por espacios de funciones en Análisis!)