Clase 28: Puntos suaves, Intersección transversal y Criterio Jacobiano

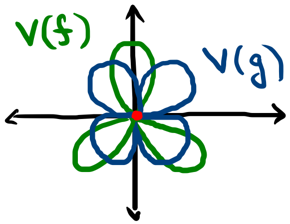
Recuerdo: La vez pasada consideramos el sgte Algoritmo para calcular el número de intersección $\mu_p(f,g) \overset{\text{def}}{=} \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle f,g\rangle)$, con $p=(0,0)$:

Paso ①: Si $f,g \notin \langle y\rangle$ escribimos $f = aX^m + r_f(X,Y)$ y $g = bX^n + r_g(X,Y)$ con $a,b\in\mathbb{C}^*$ y $m\geq n$ (sin pérdida de generalidad).
$\rightsquigarrow f' := f - \frac{a}{b}X^{m-n}g \rightsquigarrow \mu_p(f,g) = \mu_p(f',g)$. Continuar el Algoritmo con f' y g.

Paso ②: Si $f\in\langle y\rangle$, ie, $f = Yf' \rightsquigarrow \mu_p(f,g) = \mu_p(Y,g) + \mu_p(f',g)$.
Dado que $\mu_p(Y,g) = r$ con $g(X,0) = X^r h(X)$ tq $h(0)\neq 0$, podemos continuar el Algoritmo con f' y g.

Teorema: Si f y g no poseen factores irreducibles comunes que pasen por $p=(0,0)\in\mathbb{A}^2$, entonces el Algoritmo anterior termina y calcula $\mu_p(f,g)\in\mathbb{N}$.

Ejemplo: Sea $f = (x^2+y^2)^2 + 3x^2y - y^3$ y $g = (x^2+y^2)^3 - 4x^2y^2$.



$p = (0,0) \in V(f,g)$.

Luego, $\mu_p(f,g) \overset{①}{=} \mu_p(f, g - (x^2+y^2)f) = \mu_p\Big(f, \overbrace{-4x^2y^2 - 3(x^2+y^2)x^2y + (x^2+y^2)y^3}^{= y g' \text{ con } g' := (x^2+y^2)(y^2-3x^2) - 4x^2y}\Big)$

$$\overset{②}{=} \underbrace{\mu_p(f,y)}_{=4} + \mu_p(f,g')$$

Como $\mu_p(f,g') \overset{①}{=} \mu_p(f, g' + 3f) = \mu_p\big(f, y\overbrace{(5x^2 - 3y^2 + 4y^3 + 4x^2y)}^{g''}\big)$

$$\overset{②}{=} \mu_p(f,y) + \mu_p(f,g'') = 4 + \mu_p(f,g'')$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $\mu_p(f,g'') = 6$ $\rightsquigarrow$ $\mu_p(f,g) = 4 + 4 + 6 = 14$.

§47. Puntos suaves e Intersección transversal

Dados $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ de grado $d \in \mathbb{N}$, definimos la parte de grado l de f (con $l \in \{0,\dots,d\}$) como la suma f_l de los monomios $a_{ij}X^iY^j$ en f tales que $i+j=l$.
En part, los f_l son homogéneos de grado l y $f = f_0 + f_1 + \dots + f_d$.

Eg. $f = 1 + 2X^2 + 3Y + 4X^2Y^2 + X^4 \rightsquigarrow f_0 = 1,\ f_1 = 3Y,\ f_2 = 2X^2,\ f_3 = 0,\ f_4 = 4X^2Y^2 + X^4$

Decimos que: i) f_0 es la parte constante de f.
ii) f_1 es la parte lineal de f.
iii) f_d es la parte principal de f.

Prop: Sean $f, g \in \mathbb{C}[X,Y]$ no-constantes tales que $p = (0,0) \in V(f) \cap V(g)$. Entonces:
$\mu_p(f,g) = 1 \iff$ las formas lineales $\{f_1, g_1\}$ son linealmente independientes.

Dem: Seguimos el Algoritmo para calcular $\mu_p(f,g)$: pues $(0,0)\in V(f,g)$

En el Paso ①: Si $f = aX^n + r_f(X,Y)$ y $g = bX^n + r_g(X,Y)$ ambos sin parte constante

$\leadsto f' = f - \frac{a}{b}X^{m-n}g \Rightarrow f_1' = f_1$ si $m > n$ y $f_1' = f_1 - \frac{a}{b}g_1$ si $m = n$.

Así, $\{f_1, g_1\}$ l.i. $\Leftrightarrow \{f_1', g_1\}$ l.i. y por ende podemos asumir que estamos en el Paso ②: $f = Yf'$ y luego:

$$\mu_p(f,g) = \underbrace{\mu_p(Y,g)}^{\geq 1} + \mu_p(f',g) = 1 \Leftrightarrow \mu_p(Y,g) = 1 \text{ y } \mu_p(f',g) = 0$$

$\Leftrightarrow g = aX + r_g(X,Y)$ cierto $a\in\mathbb{C}^*$ y $f'(0,0)\neq 0$ (i.e., $f_0' = c \neq 0$).

$\Leftrightarrow g_1 = aX + bY$ con $a,b\in\mathbb{C}$ y $a\neq 0$ y $f_1 = cY$ con $c\neq 0$

$\Leftrightarrow \{f_1, g_1\}$ son l.i. (pues $f = Yf'$ no contiene el monomio X). ■

Def: Sea $p = (x_0, y_0)\in\mathbb{A}^2$ y $f\in\mathbb{C}[X,Y]$. Si definimos $g(X,Y) := f(X+x_0, Y+y_0)$ entonces, la multiplicidad de f en $p = (x_0,y_0)$ es

$$m_p(f) := \min\{\ell\in\mathbb{N} \text{ tal que } g_\ell \neq 0\}$$

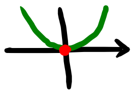
Los factores lineales de g_m, con $m = m_p(f)$, son llamados Tangentes de f en p.

Ejemplos: Sea $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{A}^2$ y $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ no-constante.

① $m_p(f) \geq 1 \iff p \in V(f)$.

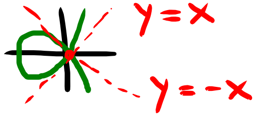
Sea $p = (0,0)$ en los sgtes ejemplos:

② $f = Y - X^2 \rightsquigarrow f_1 = Y \neq 0$ y luego $m_p(f) = \underline{1}$. Además $T_p f := Y$ es la



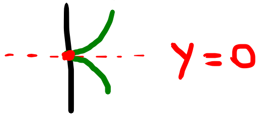
única tangente de f en $p = (0,0)$.

③ $f = Y^2 - X^2 - X^3 \rightsquigarrow f_1 = 0,\ f_2 = Y^2 - X^2 = (Y+X)(Y-X) \neq 0$ y luego $m_p(f) = 2$.



Además, f tiene dos tangentes en p: $Y+X$ e $Y-X$.

④ $f = Y^2 - X^3 \rightsquigarrow f_1 = 0,\ f_2 = Y^2 \neq 0$ y luego $m_p(f) = 2$.

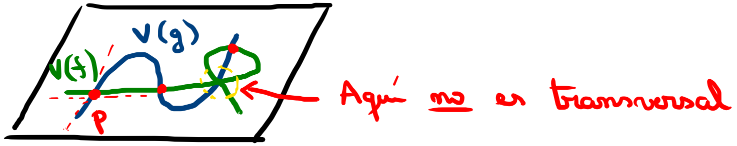


Además, f posee una única tangente en p: Y

Def: Sea $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ no-constante y $p \in V(f)$. Decimos que p es un punto suave (resp. singular) si $m_p(f) = 1$ (resp. $m_p(f) \geq 2$), y decimos que la curva $V(f) \subseteq \mathbb{A}^2$ es suave (resp. singular) si todos sus puntos son suaves (resp. si existe un punto singular).

Notamos que si $p \in V(f)$ es suave, entonces existe una <u>única</u> tangente $T_p f$ de f en p. Más aún, la proposición anterior puede reescribirse como:

<u>Prop</u> (reformulación): Sean $f, g \in \mathbb{C}[X,Y]$ no-constantes y $p \in V(f) \cap V(g)$. Entonces:
$\mu_p(f,g) = 1 \iff p$ es un punto suave de $V(f)$ y $V(g)$, y además $T_p f \neq T_p g$.



<u>Terminología</u>: Si $\mu_p(f,g) = 1$, decimos que $V(f)$ y $V(g)$ se intersectan transversalmente en p.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $m_p(fg) = m_p(f) + m_p(g)$. Deducir que si $p \in V(f)$ pertenece a dos componentes irreducibles de $V(f)$ entonces p es singular.

§48. Criterio Jacobiano

En teoría, para verificar si $p=(x_0,y_0)\in V(f)$ es suave o singular primero debemos trasladar p al origen mediante $X\mapsto X'=X-x_0$, $Y\mapsto Y'=Y-y_0$ y estudiar la multiplicidad. Esto deberíamos hacerlo para todo punto si quisieramos determinar

$$\operatorname{Sing}(V(f)) := \{p\in V(f) \text{ tal que } p \text{ es singular}\} \quad \text{"lugar singular"}$$

Sin embargo, hay un método mucho más eficiente:

Teorema (Criterio Jacobiano): Sea $f\in\mathbb{C}[X,Y]$ no-constante y $p=(x_0,y_0)\in V(f)$. Entonces:

1. p es singular $\iff \dfrac{\partial f}{\partial X}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial f}{\partial Y}(x_0,y_0)=0$.

2. Si p es suave, entonces T_pf está dada por la forma lineal

$$T_pf = \frac{\partial f}{\partial X}(x_0,y_0)\cdot(X-x_0)+\frac{\partial f}{\partial Y}(x_0,y_0)\cdot(Y-y_0)$$

En particular, $\operatorname{Sing}(V(f)) = V\left(f,\frac{\partial f}{\partial X},\frac{\partial f}{\partial Y}\right)\subseteq V(f)$.

Dem: Sea $X := X' + x_0$, $Y := Y' + y_0$ y $g(X',Y') := f(X'+x_0, Y'+y_0)$. Así, $q = (0,0) \in V(g)$ y $g = aX' + bY' + r_g(X',Y')$. Luego,

$$p \in V(f) \text{ singular} \overset{\text{def}}{\iff} q \in V(g) \text{ singular} \overset{\text{def}}{\iff} m_q(g) \geq 2 \iff a = b = 0.$$

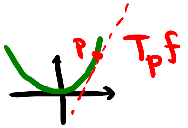
Por otro lado, $\dfrac{\partial f}{\partial X}(p) = \dfrac{\partial g}{\partial X'}(q) = a$ y $\dfrac{\partial f}{\partial Y}(p) = \dfrac{\partial g}{\partial Y'}(q) = b$ $\rightsquigarrow$ ① ✓

Más aún, $g_1 = aX' + bY' = T_q g$ y luego $f_1 = \dfrac{\partial f}{\partial X}(p)\cdot(X - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial Y}(p)\cdot(Y - y_0) = T_p f$ si $p \in V(f)$ es un punto suave $\rightsquigarrow$ ② ✓ ■

Ejemplos

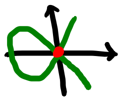
nunca se anula!

① $f = Y - X^2$ es suave pues $\dfrac{\partial f}{\partial X} = -2X$, $\dfrac{\partial f}{\partial Y} = 1 \neq 0$ $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Sing}(V(f)) = \emptyset$.



② $f = Y^2 - X^2 - X^3$:

$\dfrac{\partial f}{\partial X} = -2X - 3X^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial Y} = 2Y$. Luego, si $p = (x_0, y_0) \in \mathrm{Sing}(V(f)) \Rightarrow y_0 = 0$



$-2x_0 - 3x_0^2 = 0$

Como $y_0 = x_0^2 + x_0^3 \Rightarrow x_0 = 0$. Observamos que $p = (0,0) \in V\left(f, \dfrac{\partial f}{\partial X}, \dfrac{\partial f}{\partial Y}\right)$ $\rightsquigarrow$ único punto singular!

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $f = Y^2 - (aX^2 + bX + c)$, con $a, b, c \in \mathbb{C}$. Determinar condiciones en a, b, c de tal suerte que $V(f) \subseteq \mathbb{A}^2$ sea una curva suave.

§49. Local versus Global

Si $p \in V(f) \cap V(g)$, entonces $\mu_p(f,g) \overset{\text{def}}{=} \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle f,g\rangle)$ se calcula localmente.

¿Cómo relacionarlo a la intersección global $\Gamma = V(f) \cap V(g) \subseteq \mathbb{A}^2$?

$\boxed{\text{Ejercicio útil}}$ Sean $f,g \in \mathbb{C}[X,Y]$ no-constantes sin factores irreducibles comunes, y sea $p \in V(f) \cap V(g)$. Probar que todo elemento de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle f,g\rangle$ posee un representante polinomial (i.e, $\forall \left[\frac{a}{b}\right] \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle f,g\rangle$, $\exists\, r \in \mathbb{C}[X,Y]$ tal que $\left[\frac{a}{b}\right] = [r] \overset{\text{def}}{=} \left[\frac{r}{1}\right]$).

Prop: Sean $f,g \in \mathbb{C}[X,Y]$ no-constantes sin factores irreducibles comunes. Entonces,

$$\varphi : \mathbb{C}[X,Y]/\langle f,g\rangle \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{p \in V(f)\cap V(g)} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle f,g\rangle \,,\quad h \longmapsto \left([h] \text{ en } \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle f,g\rangle\right)_{p \in V(f)\cap V(g)}$$

es un isomorfismo. En part, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X,Y]/\langle f,g\rangle) = \sum_{p \in V(f)\cap V(g)} \mu_p(f,g)$.

Dem: Sea $V(f) \cap V(g) = \{p_0, \dots, p_m\}$ conj. finito. Veamos que φ es sobreyectivo:

Comencemos por analizar la componente p_0, i.e, $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p_0}/\langle f,g\rangle$:

Dem (continuación): Si $p_i = (x_i, y_i)$ y $h := (X-x_1)\cdots(X-x_m)(Y-y_1)\cdots(Y-y_m) \in \mathbb{C}[X,Y]$

$\Rightarrow h(p_0) \neq 0$ y $h(p_i) = 0 \ \forall i > 0$. Sea $N > \max\{\mu_{p_i}(f,g),\ i = 0,\dots,m\}$ y veamos que $h^N = 0$ en $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p_i}/\langle f,g\rangle \ \forall i>0$: Consideremos

$$\langle f,g\rangle \supseteq \langle f,g,h\rangle \supseteq \langle f,g,h^2\rangle \supseteq \dots \supseteq \langle f,g,h^N\rangle \text{ en } \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p_i}$$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p_i}/\langle f,g,h\rangle \leq \dots \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p_i}/\langle f,g,h^N\rangle \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p_i}/\langle f,g\rangle$. Para $N \gg 0$:

$\rightsquigarrow \langle f,g,h^k\rangle = \langle f,g,h^{k+1}\rangle$, ie, $h^k = af + bg + ch^{k+1}$ en $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p_i} \Rightarrow h^k \underbrace{(1-ch)}_{\text{invertible en } \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p_i}} \in \langle f,g\rangle$.

Como $(1-ch)(p_i) = 1 \neq 0$ tenemos $h^k \in \langle f,g\rangle$ para cierto $k \in \{1,\dots,N-1\}$

$\Rightarrow h^N = 0$ en $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p_i}/\langle f,g\rangle \ \forall i > 0$ ✓

Sea $a \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p_0}/\langle f,g\rangle$ arbitrario. El Ejercicio útil implica que $\frac{a}{h^N}$ tiene un representante polinomial $b \in \mathbb{C}[X,Y]$ en $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p_0}/\langle f,g\rangle$. Así, $bh^N \xmapsto{\varphi} (\frac{a}{h^N}h^N, 0, \dots, 0) = (a, 0, \dots, 0)$.

Por simetría, φ es sobreyectivo en cada componente $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p_i}/\langle f,g\rangle$ ✓

Inyectividad: Sea $h \in \mathbb{C}[X,Y]$ tq $[h] \in \ker(\varphi)$ y definamos el ideal

$$I := \{r \in \mathbb{C}[X,Y] \text{ tq } hr \in \langle f,g\rangle\} \rightsquigarrow \langle f,g\rangle \subseteq I \text{ por def}$$

Veamos que $V(I) = \emptyset$ ($\Rightarrow I = \mathbb{C}[X,Y]$ (Nullstellensatz) y luego $1 \in I$, ie, $h \in \langle f,g\rangle$, ie, $h = 0$ en $\mathbb{C}[X,Y]/\langle f,g\rangle$ ✓):

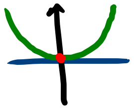
<u>Dem</u> (continuación): Si asumimos por contradicción que $\exists\, p \in V(I) \subseteq \mathbb{A}^2$

$\Rightarrow p \in V(f) \cap V(g)$ pues $\langle f, g \rangle \subseteq I$, i.e., $p = p_i$ para cierto $i \in \{0, \dots, m\}$.

Luego, $h = 0$ en $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2, p} / \langle f, g \rangle$ (pues $h \in \ker(\varphi)$), i.e., $h = \frac{a}{r} f + \frac{b}{r} g$ para ciertos $a, b, r \in \mathbb{C}[X, Y]$ con $r(p) \neq 0$.

$\Rightarrow rh = af + bg \in \langle f, g \rangle$ y así $r \in I \overset{p \in V(I)}{\rightsquigarrow} r(p) = 0$ por def $\lightning$ $\blacksquare$

<u>Ejemplo</u>: Si $f = Y$ y $g = Y - X^n$ entonces $V(f) \cap V(g) = \{p\}$ con $p = (0,0)$



$\Rightarrow \mu_p(f, g) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[X, Y] / \langle Y, Y - X^n \rangle$.

Como $\mathbb{C}[X, Y] / \langle Y, Y - X^n \rangle \cong \mathbb{C}[X] / \langle X^n \rangle \underset{\mathbb{C}\text{-ev}}{=} \langle 1, X, \dots, X^{n-1} \rangle \Rightarrow \mu_p(f, g) = n$ ✓

La próxima clase veremos cómo el Teorema de Bézout (1779), anunciado originalmente por Isaac Newton (1687), permite calcular $\sum_{p \in V(f) \cap V(g)} \mu_p(f, g)$.