Clase 27: Calculando números de intersección

§45. Multiplicidad de intersecciones (continuación):

Recuerdo: Sea $p \in \mathbb{A}^2$ un punto. El anillo local de $\mathbb{A}^2$ en p es

$$\mathcal{O}_p := \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p} := \left\{ \frac{f}{g} \text{ tales que } f,g \in \mathbb{C}[X,Y] \text{ con } g(p) \neq 0 \right\} \subseteq \mathbb{C}(X,Y)$$

Definimos el morfismo de evaluación $\mathrm{ev}_p : \mathcal{O}_p \twoheadrightarrow \mathbb{C}$, $\frac{f}{g} \longmapsto \frac{f(p)}{g(p)}$ cuyo kernel es un ideal maximal:

$$\mathfrak{m}_p := \mathfrak{m}_{\mathbb{A}^2,p} := \left\{ \frac{f}{g} \text{ tales que } f,g \in \mathbb{C}[X,Y] \text{ con } f(p) = 0 \text{ y } g(p) \neq 0 \right\}$$

Además, $(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}, \mathfrak{m}_{\mathbb{A}^2,p})$ es un anillo local noetheriano y un DFU.

Def: Sea $p \in \mathbb{A}^2$ un punto arbitrario. Dados $f, g \in \mathbb{C}[X,Y]$ (no-constantes), definimos la multiplicidad de intersección (o número de intersección) de f y g en $p \in \mathbb{A}^2$ mediante:

No es estrictamente necesario en la def.

$$\mu_p(f,g) := \dim_{\mathbb{C}} \left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p} / \langle f, g \rangle \right) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

como $\mathbb{C}$-ev!

A pesar de ser una definición abstracta (y que no sea directo a primera vista saber cuándo $\mu_p(f,g)<\infty$), podemos obtener varias propiedades por definición:

① $\mu_p(f,g)=\mu_p(g,f)$ para todos $f,g\in\mathbb{C}[X,Y]$.

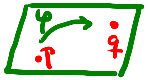
② Si $h\in\mathbb{C}[X,Y]$ entonces $\langle f, g+fh\rangle = \langle f,g\rangle$ y luego

$$\mu_p(f,g+fh)=\mu_p(f,g) \quad \forall p\in\mathbb{A}^2$$

e.g., $\varphi(x,y)=(x-x_0,y-y_0)$

③ Sea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in GL_2(\mathbb{C})$ y $v_0=(e,f)\in\mathbb{A}^2$. Sea $\varphi(x,y):=(\underbrace{ax+by+e}_{=:x'},\underbrace{cx+dy+f}_{=:y'})$.
Si $p=(x_0,y_0)\in\mathbb{A}^2$ y $q:=\varphi(p)\in\mathbb{A}^2$, entonces φ induce

$$(\varphi^{-1})^*:\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,q},\ \frac{f}{g}\longmapsto\frac{(f\circ\varphi^{-1})}{(g\circ\varphi^{-1})}$$ isomorfismo de anillos locales



En part, si $f,g\in\mathbb{C}[X,Y]$ entonces $f':=f\circ\varphi^{-1}$ y $g':=g\circ\varphi^{-1}$ son polinomios en las nuevas coordenadas (x',y') de $\mathbb{A}^2$. Más aún, $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle f,g\rangle\cong\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,q}/\langle f',g'\rangle$ y así

$$\mu_p(f,g)=\mu_q(f',g')$$

Luego, sin pérdida de generalidad, siempre es posible suponer $p = (0,0) \in \mathbb{A}^2$.

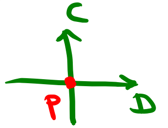
Lema: Sea $p \in \mathbb{A}^2$ un punto, y sean $f, g \in \mathbb{C}[X,Y]$. Entonces:

1. $\mu_p(f,g) \neq 0 \iff p \in V(f) \cap V(g)$.
2. $\mu_p(f,g) = 1 \iff \langle f, g \rangle = \mathfrak{m}_{\mathbb{A}^2,p}$ en $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}$.

Dem: $p \notin V(f) \overset{\text{def}}{\iff} f(p) \neq 0 \overset{\text{def}}{\iff} f \notin \mathfrak{m}_{\mathbb{A}^2,p} \overset{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}\text{ local}}{\iff} f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}^{\times}$. En part, $\langle f, g \rangle = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}$ y luego $\mu_p(f,g) = 0$ en tal caso (similar si $g(p) \neq 0$).
En part, 1 y 2 se cumplen si $f(p) \neq 0$ o $g(p) \neq 0$ ✓

Sup. $f(p) = g(p) = 0$ (i.e., $p \in V(f) \cap V(g)$). En part, $f, g \in \ker(ev_p : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p} \twoheadrightarrow \mathbb{C})$ y luego la Prop. Universal del Cociente implica que existe $\widehat{ev}_p : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p} / \langle f, g \rangle \twoheadrightarrow \mathbb{C}$.
$\Rightarrow \mu_p(f,g) \overset{\text{def}}{=} \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p} / \langle f,g \rangle) \geq 1$ ($\Rightarrow$ 1 ✓), con igualdad si y sólo si $\widehat{ev}_p$ es un isomorfismo, i.e., $\langle f, g \rangle = \ker(ev_p) \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{m}_{\mathbb{A}^2 p}$ ($\Rightarrow$ 2 ✓) ∎

Ejemplo: Sean $f = X$ y $g = Y$ $\rightsquigarrow$ $C = V(X)$ "eje Y", $D = V(Y)$ "eje X"

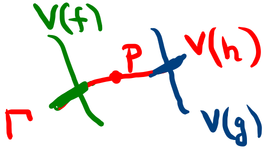


Sea $p = (0,0) = C \cap D$. Por definición,

f sin término constante

$$\ker(\mathrm{ev}_p) := \left\{ \frac{f}{g} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p} \text{ tq } f(p) = 0 \text{ y } g(p) \neq 0 \right\} = \langle X, Y \rangle \overset{\text{Lema}}{\Longrightarrow} \mu_{(0,0)}(X,Y) = 1.$$

Ejemplo importante: Sean $f, g \in \mathbb{C}[X,Y]$ no-constantes y sea $p \in V(f) \cap V(g)$.



Veamos que:

"Si f y g poseen un factor irreducible común h tal que $h(p) = 0$, entonces $\mu_p(f,g) = \infty$"

En efecto, si $f = h f_0$ y $g = h g_0$ con $h(p) = 0$ y h irreducible

$\Rightarrow \langle f, g \rangle \subseteq \langle h \rangle \subseteq \mathbb{C}[X,Y]$ y luego $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle f,g\rangle \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle h \rangle$ sobreyectivo.

Basta ver que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle h \rangle) = \infty$. Para ello, notamos que si $\Gamma := V(h) \subseteq \mathbb{A}^2$

$$\Rightarrow \mathcal{O}(\Gamma) \cong \mathbb{C}[X,Y]/I(\Gamma) \underset{\text{Nullstellensatz}}{=} \underbrace{\mathbb{C}[X,Y]/\langle h \rangle}_{\text{dominio}} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle h \rangle.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(\Gamma)) < +\infty \iff \Gamma = V(h) \text{ conjunto finito (Ejercicio).}$$

Como $\mathbb{C}$-mód ($\mathbb{C}$-ev)

[Indicación: Cada $x \in V(h)$ induce $\mathcal{O}(\Gamma) \xrightarrow{\text{ev}_x} \mathcal{O}(\Gamma)/\mathfrak{m}_x \cong \mathbb{C} \rightsquigarrow \mathcal{O}(\Gamma) \twoheadrightarrow \bigoplus_{x \in \Gamma} \mathcal{O}(\Gamma)/\mathfrak{m}_x$]

Sin embargo, sabemos que si h no-constante $\underset{\text{Lema}}{\Rightarrow} V(h)$ es infinito $\Rightarrow \mu_p(f,g) = \infty$ ✓

Prop: Sea $p \in \mathbb{A}^2$, y sean $f, g, h \in \mathbb{C}[X,Y]$ no-constantes. Entonces

1. Si f y g no poseen factores irreducibles comunes que pasen por $p \in \mathbb{A}^2$, entonces

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle f,h\rangle \xrightarrow{\cdot g} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle f,gh\rangle \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle f,g\rangle \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de $\mathbb{C}$-ev.

2. $\mu_p(f,gh) = \mu_p(f,g) + \mu_p(f,h)$.

Dem: (1) Podemos asumir que f y g son rel. primos en $\mathbb{C}[X,Y]$, pues factores irred. comunes que no pasan por $p \in \mathbb{A}^2$ son invertibles en $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}$.

Dem (continuación): Veamos por ejemplo que $\pi: \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle f, gh\rangle \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle f, g\rangle$ es sobreyectiva:
Como $\langle gh\rangle \subseteq \langle g\rangle$ tenemos $\langle f, gh\rangle \subseteq \langle f, g\rangle$. Luego, la proyección al cociente
$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p} \overset{p}{\twoheadrightarrow} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle f, g\rangle$ induce $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle f, gh\rangle \xrightarrow{\pi := \hat{p}} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle f, g\rangle$ con $\mathrm{Im}(\hat{p}) = \mathrm{Im}(p)$
por la propiedad universal del cociente ✓ Además, $\ker(\pi) = \ker(p)/\langle f, gh\rangle = \langle g\rangle$ en $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle f, gh\rangle$

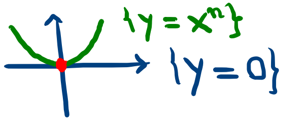
En part, $\ker(\pi) = \mathrm{Im}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle f, h\rangle \xrightarrow{g} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle f, gh\rangle\right)$ ✓
La inyectividad de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle f, h\rangle \overset{\cdot g}{\hookrightarrow} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle f, gh\rangle$ queda como $\boxed{\text{Ejercicio}}$.

2 Si $0 \to U \overset{\alpha}{\hookrightarrow} V \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} W \to 0$ sucesión exacta de $\mathbb{C}$-ev de dim finita, entonces
$\dim_{\mathbb{C}}(U) + \dim_{\mathbb{C}}(W) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}(\alpha) + \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}(\beta) \overset{\text{Noether}}{=} \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}(\alpha) + \dim_{\mathbb{C}}(V/\ker(\beta))$
$= \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}(\alpha) + \dim_{\mathbb{C}}(V/\mathrm{Im}(\alpha)) = \dim_{\mathbb{C}}(V)$.
exactitud

Luego, si f, g no poseen factores irreducibles comunes que pasen por $p \in \mathbb{A}^2$ tenemos que 1 implica $\mu_p(f, gh) = \mu_p(f, g) + \mu_p(f, h)$ ✓ En caso contrario obtenemos $\mu_p(f, g) = \infty$ y $\mu_p(f, gh) = \infty$ por lo que se sigue cumpliendo la identidad ("$\infty = \infty$") ✓ ∎

Ejemplo clave: Sea $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ no-constante tal que $f \notin \langle Y \rangle$ (i.e., f no es idénticamente nulo en el eje x). Calculemos $\mu_{(0,0)}(f,Y)$:

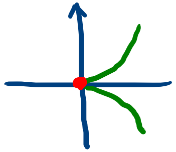
Si no: $\mu_{(0,0)}(f,Y) = \infty$



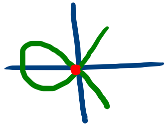
Como $f \notin \langle Y \rangle$, tenemos $f(X,0) = X^m g(X)$ para cierto $m \in \mathbb{N}$ y $g \in \mathbb{C}[X]$ tq $g(0) \neq 0$.

Así,
$$\begin{aligned}
\mu_{(0,0)}(Y,f) &= \mu_{(0,0)}(Y, f + Yh) \quad \forall h \in \mathbb{C}[X,Y] \\
&= \mu_{(0,0)}(Y, f(X,0)) = \mu_{(0,0)}(Y, X^m g(X)) \\
&= \mu_{(0,0)}(Y, X^m) + \underbrace{\mu_{(0,0)}(Y, g(X))}_{=0 \text{ pues } g(0)\neq 0} \\
&= m \underbrace{\mu_{(0,0)}(Y,X)}_{=1} = m.
\end{aligned}$$

Por ejemplo, $\mu_{(0,0)}(Y, Y - X^m) = m$ ✓ y $\mu_{(0,0)}(Y, Y^2 - X^3) = 3$ ✓



$\mu_{(0,0)}(Y, Y^2 - X^2(X+1)) = 2$ ✓



§46. Finitud y cálculo de intersecciones

OK módulo cambio de coord. afín

Sean $f, g \in \mathbb{C}[X,Y]$ no-constantes y supongamos que $p = (0,0) \in V(f) \cap V(g)$.

Algoritmo: Para calcular $\mu_p(f,g)$ seguimos el sgte procedimiento:

Paso ①: Si f y g poseen un monomio indep. de Y (i.e., $f, g \notin \langle Y \rangle$) escribimos

$$f = aX^m + r_f(X,Y) \quad \text{y} \quad g = bX^n + r_g(X,Y)$$

con $a, b \in \mathbb{C}^*$, r_f y r_g conteniendo potencias de grado inferior en X, y donde podemos suponer $m \geq n$ (pues $\mu_p(f,g) = \mu_p(g,f)$).

Definir $f' := f - \frac{a}{b} X^{m-n} g \quad \left(= r_f(X,Y) - \frac{a}{b} X^{m-n} r_g(X,Y)\right)$. $\rightsquigarrow \langle f, g \rangle = \langle f', g \rangle$

Luego, $\mu_p(f,g) = \mu_p(f',g)$ y podemos continuar el algoritmo con f' y g.

Paso ②: Si f o g es múltiplo de Y, eg. si $f = Yf'$ entonces:

$$\mu_p(f,g) = \mu_p(Y,g) + \mu_p(f',g).$$

Luego: $\mu_p(Y,g)$ se calcula usando el "Ejemplo clave" ✓

Podemos continuar el algoritmo con f' y g. ■

Teorema: Si f y g no poseen factores irreducibles comunes que pasen por $p=(0,0) \in \mathbb{A}^2$, entonces el Algoritmo anterior termina y calcula $\mu_p(f,g) \in \mathbb{N}$.

Dem: Los pasos ① y ② preservan el hecho que f y g no poseen factores irred. que pasen por p:

En ①, f y $f' \overset{\text{def}}{=} f - \frac{a}{b}X^{m-n}g$ tienen los mismos factores comunes con g.

En ②, f' y $f = Yf'$ tienen los mismos factores comunes con g.

En part, el caso $\mu_p(Y,g) = \infty$ (i.e., $g \in \langle Y \rangle$) no ocurre y por ende, si el algoritmo termina (en finitos pasos), la respuesta final $\mu_p(f,g) < \infty$ es finita.

<u>Dem</u> (continuación): Para ver que el algoritmo termina, consideramos $\langle f, g\rangle \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}$:

En ①, $\langle f, g\rangle = \langle f', g\rangle$ y $gr_x(f') < gr_x(f)$. Luego, en finitos pasos llegamos a $f \in \langle y\rangle$, i.e., al caso ②.

En ②, $f = y f'$ y luego $\langle f, g\rangle \subseteq \langle f', g\rangle$. Dicha inclusión es <u>estricta</u> pues sino, la exactitud de

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle y, g\rangle \xhookrightarrow{\cdot f'} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle f, g\rangle \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle f', g\rangle \to 0$$

implicaría (dado que π isomorfismo) que $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}/\langle y, g\rangle = 0$, i.e., $\mu_p(y,g) = 0$.

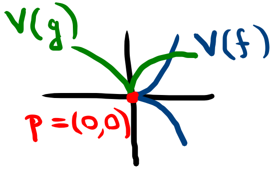
Sin embargo, $p = (0,0) \in V(y) \cap V(g)$ y luego $\mu_p(y,g) \geq 1$ $\lightning$

Luego, si el algoritmo no termina podríamos crear una cadena ascendente

$$I_0 = \langle f, g\rangle \subsetneq I_1 = \langle f_1, g\rangle \subsetneq I_2 = \langle f_2, g\rangle \subsetneq \dots \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}$$

que <u>no</u> se estabiliza. Esto contradice el hecho que $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}$ es Noetheriano. ∎

Ejemplo: Sea $f = Y^2 - X^3$ y $g = X^2 - Y^3$:



Calculemos $\mu_p(f,g)$, con $p=(0,0)$:

$$\mu_p(Y^2-X^3,\ X^2-Y^3) \overset{①}{=} \mu_p(Y^2-X^3+X(X^2-Y^3),\ X^2-Y^3)$$

$$= \mu_p(Y^2-XY^3,\ X^2-Y^3) \xrightarrow{\text{alternativamente}} \overbrace{\mu_p(Y^2,\ X^2-Y^3)}^{=2\mu_p(Y,\ X^2-Y^3)} + \mu_p(1-XY,\ X^2-Y^3)$$

$$\overset{②}{=} \underbrace{\mu_p(Y,\ X^2-Y^3)}_{=2\ (\text{Ej. clase})} + \mu_p(Y-XY^2,\ X^2-Y^3)$$

$$\overset{②}{=} 2 + \underbrace{\mu_p(Y,\ X^2-Y^3)}_{=2} + \underbrace{\mu_p(1-XY,\ X^2-Y^3)}_{=0}$$ pues $f'=1-XY$ cumple $f'(p)=1\neq 0$.

$$\Rightarrow \mu_p(Y^2-X^3,\ X^2-Y^3) = 4$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sean $f = Y^2 - X^2(X+1)$ y $g = Y^2 - X^3$. Calcular $\mu_{(0,0)}(f,g)$.