Parte III : Curvas planas y Teoría de Intersección (tópico adicional)

Clase 26 : Curvas planas afines y Multiplicidad de intersección

§44. Curvas planas afines

En todo lo que sigue, nuestros objetos estarán definidos sobre $k = \mathbb{C}$.

Def: Una curva (algebraica) plana afín $C \subseteq \mathbb{A}^2$ es el lugar de ceros de un polinomio no-constante $f \in \mathbb{C}[X, Y]$. Explícitamente,

$$C = V(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{ (x,y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tal que } f(x,y) = 0 \}.$$

En part, si $g = \lambda f$ para cierto $\lambda \in \mathbb{C}^*$ entonces $V(f) = V(g)$ y en tal caso escribimos $f \sim g$.

Recuerdo (Clase 15): Sea A un dominio. Decimos que $a \in A$ es irreducible si $a \notin A^\times$ y si "$a = xy$ entonces $x \in A^\times$ o bien $y \in A^\times$"

Un hecho que usaremos constantemente es que si k es un cuerpo, entonces $k[X_1, \dots, X_n]$ es un Dominio de Factorización Única (DFU), ie:

"Todo $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ no-nulo puede escribirse como producto

$$f = u P_1 \cdots P_r$$

donde P_i son irreducibles y u es invertible ($\Rightarrow u \in k^\times$ en este caso).
Además, dicha escritura es única módulo permutaciones de los P_i y multiplicación por elementos invertibles".

Obs: Reagrupando términos repetidos e incluyendo $u \in k^\times$ en cualquier P_i, tenemos que todo $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ no-nulo puede escribirse como

$$f = P_1^{a_1} \cdots P_r^{a_r}$$

donde los P_i son los factores irreducibles de f y $a_i \in \mathbb{N}$ sus multiplicidades.

En el contexto de curvas planas esto motiva las sgtes observaciones y definiciones:

Sea $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ polinomio no-constante y $C = V(f) \subseteq \mathbb{A}^2$ la curva plana asociada.

bien def si f es reducido

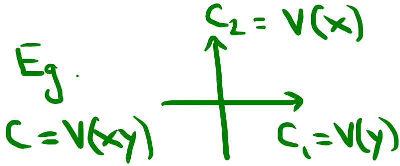
① El grado de C, denotado $\deg(C)$, es el grado total de $f(X,Y)$ (ie, el máximo $n+m$ entre los monomios $X^n Y^m$ que aparecen en f).

Eg. $f = 1 + X + X^2Y^2 \Rightarrow \deg(f) = 4$, $g = X^3 - Y^2 \Rightarrow \deg(g) = 3$

② Recordando que $V(f) = V(f^n)$ $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y $V(fg) = V(f) \cup V(g)$, tenemos que si $f = P_1^{a_1} \cdots P_r^{a_r}$ es la factorización en factores irreducibles entonces

$$C = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_r \quad \text{donde } C_i := V(P_i) \subseteq \mathbb{A}^2$$

Eg.

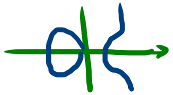


Cada C_i es llamada una componente irreducible de C.

Decimos que f es reducido si $a_i = 1$ $\forall i$ $\left(\Leftrightarrow \sqrt{\langle f \rangle} = \langle f \rangle\right)$.

Decimos que C es una curva irreducible si $r = 1$ ($\Leftrightarrow f$ irreducible $\Leftrightarrow \langle f \rangle$ primo), y en caso contrario diremos que es una curva reducible.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que si $f \sim g$ (i.e., $\exists \lambda \in \mathbb{C}^\times$ tq $g = \lambda f$) entonces las propiedades anteriores no dependen de f o g, sólo de $C = V(f) = V(g)$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tq } y^2 = x^3 - x\}$ es irreducible. "  " (en $\mathbb{R}^2$)

Lema: Sea $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ no-constante y $C = V(f) \subseteq \mathbb{A}^2$ la curva plana asociada.
Entonces:
1. C es un conjunto infinito.
2. $\mathbb{A}^2 \setminus C$ es un conjunto infinito.

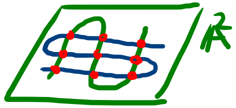
Dem: Como $\deg(f) \geq 1$, f tiene grado ≥ 1 en X o Y. Eg. $f = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ con $n \geq 1$ y $a_i \in \mathbb{C}[Y]$ con $a_n \neq 0$.

$\Rightarrow a_n(Y)$ tiene finitas raíces, i.e., $\exists$ infinitos $b \in \mathbb{C}$ tq $a_n(b) \neq 0$.

$\Rightarrow f(X,b) =: f_b(X)$ no-constante y luego:

1. $\exists a \in \mathbb{C}$ tq $0 = f_b(a) = f(a,b)$ por el TFA ✓
2. $\exists a \in \mathbb{C}$ tq $0 \neq f_b(a) = f(a,b)$, i.e., $(a,b) \notin C$. ✓ $\blacksquare$

Prop: Sean $f, g \in \mathbb{C}[X,Y]$ no-constantes tal que f y g <u>no</u> poseen factores irreducibles comunes (ie, $C = V(f)$ y $D = V(g)$ no poseen componentes irreducibles comunes). Entonces, $V(f,g) = V(f) \cap V(g)$ es un conjunto finito.



Dem: f y g son relativamente primos en $\mathbb{C}[X,Y]$, veamos que también lo son en $K[Y]$ donde $K = \mathbb{C}(X) \overset{\text{def}}{=} Fr(\mathbb{C}[X])$ ("Lema de Gauss"):

Sino, $f = \tilde{p}\tilde{f}$ y $g = \tilde{p}\tilde{g}$ en $K[Y]$ $\Longrightarrow$ $rf = P \cdot f'$ y $rg = P \cdot g'$

con $r \in \mathbb{C}[X]$ y $P, f', g' \in \mathbb{C}[X,Y]$.

$\Rightarrow$ Cada factor irred r_i de r divide P o bien divide a f' y g' simultaneamente.

Así, reemplazando P por P/r_i ó f', g' por $f'/r_i, g'/r_i$ $\Rightarrow$ $f = Pf'$ y $g = Pg'$ ↯

Finalmente, como $K[Y]$ es un DIP (cf. Clase 15) y $f, g \in K[Y]$ rel. primos $\overset{\text{Bezout}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, u, v \in K[Y]$ tq $uf + vg = 1$ $\Rightarrow$ $u'f + v'g = r \in \mathbb{C}[X]\setminus\{0\}$ con $u', v' \in \mathbb{C}[X,Y]$

Así, si $p = (a,b) \in V(f) \cap V(g)$ $\Rightarrow$ $0 = r(a)$ $\Rightarrow$ Finitos $a \in \mathbb{C}$ posibles. Cambiando $K = \mathbb{C}(X)$ por $\mathbb{C}(Y)$ deducimos que hay finitos $b \in \mathbb{C}$ posibles ∎

Corolario: Sea $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ no-constante fijo. Entonces, para todo $g \in \mathbb{C}[X,Y]$ irreducible tenemos:

$$g \text{ divide a } f \iff V(g) \subseteq V(f) \text{ en } \mathbb{A}^2$$

En part, $V(f)$ permite determinar los factores irreducibles de f (pero no sus multiplicidades).

Dem: $(\Rightarrow)$ Si $f = gh$ entonces $V(f) = V(gh) = V(g) \cup V(h)$ ✓

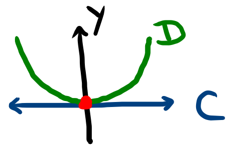
$(\Leftarrow)$ Si $V(g) \subseteq V(f)$ entonces $V(f) \cap V(g) = V(g)$. Como $V(g)$ es un conjunto infinito, deducimos por la Proposición anterior que f y g tienen un factor irreducible común $\Rightarrow g$ divide a f (pues g irreducible) ✓ ∎

Obs: Esto también nos permite probar "a mano" el Hilbert Nullstellensatz en el caso particular cuando $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ es irreducible. En efecto:

Si $g \in \mathcal{I}(V(f)) \overset{\text{def}}{=} \{h \in \mathbb{C}[X,Y] \text{ tq } h(a,b) = 0 \ \forall (a,b) \in V(f)\} \Rightarrow V(f) \subseteq V(g)$

$\Rightarrow f$ divide a g. Así $\mathcal{I}(V(f)) \subseteq \langle f \rangle$ y luego $\mathcal{I}(V(f)) = \langle f \rangle$.

§45. Multiplicidad de intersecciones



Motivación: La curva $C = \{y=0\}$ ("eje X") y $D = \{y = x^n\}$ se intersectan en $p=(0,0)$. Sin embargo, intuitivamente se intersectan con "multiplicidad n"

¿Cómo definir formalmente el concepto de intersección múltiple? ¿Cómo calcular?

Veremos que el álgebra permite dar resultados bastante satisfactorios!

Recuerdo (Clase 21): Sea $p \in \mathbb{A}^2$ un punto. El anillo local de $\mathbb{A}^2$ en p es

$$\mathcal{O}_p := \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p} := \left\{ \frac{f}{g} \text{ tales que } f,g \in \mathbb{C}[X,Y] \text{ con } g(p) \neq 0 \right\} \subseteq \mathbb{C}(X,Y)$$

Definimos el morfismo de evaluación $ev_p : \mathcal{O}_p \twoheadrightarrow \mathbb{C}$, $\frac{f}{g} \longmapsto \frac{f(p)}{g(p)}$ cuyo kernel es un ideal maximal:

$$\mathfrak{m}_p := \mathfrak{m}_{\mathbb{A}^2,p} := \left\{ \frac{f}{g} \text{ tales que } f,g \in \mathbb{C}[X,Y] \text{ con } f(p) = 0 \text{ y } g(p) \neq 0 \right\}$$

Además, $(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}, \mathfrak{m}_{\mathbb{A}^2,p})$ es un anillo local (ie, $\exists!$ ideal maximal) y un DFU.

Ejercicio Sea A un anillo y $S \subseteq A$ subconj. multiplicativo. Probar que si A es noetheriano entonces $S^{-1}A$ también. Deducir que $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}$ es Noetheriano.

No es estrictamente necesario en la def.

Def: Sea $p \in \mathbb{A}^2$ un punto arbitrario. Dados $f, g \in \mathbb{C}[X,Y]$ (no-constantes), definimos la multiplicidad de intersección (o número de intersección) de f y g en $p \in \mathbb{A}^2$ mediante:

$$\mu_p(f,g) := \dim_{\mathbb{C}}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p} / \langle f,g \rangle\right) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

como $\mathbb{C}$-ev!

A pesar de ser una definición abstracta (y que no sea directo a primera vista saber cuándo $\mu_p(f,g) < \infty$), podemos obtener varias propiedades por definición:

① $\mu_p(f,g) = \mu_p(g,f)$ para todos $f, g \in \mathbb{C}[X,Y]$.

② Si $h \in \mathbb{C}[X,Y]$ entonces $\langle f, g+fh \rangle = \langle f, g \rangle$ y luego

$$\mu_p(f, g+fh) = \mu_p(f,g) \quad \forall p \in \mathbb{A}^2.$$