Clase 25: Localización

§43. Localización de anillos y módulos

La localización de anillos nos permitirá generalizar en gran medida la construcción del cuerpo de fracciones $\mathrm{Fr}(A)$ de un dominio A. Geométricamente, nos permitirá estudiar funciones (regulares) localmente.

Recuerdo (cf. Clase 14): Sea A un anillo. Un subconjunto $S \subseteq A$ es multiplicativo si:
"$1 \in S$ y si $a, b \in S$ entonces $ab \in S$"

Ejemplos:

0. $S = \{1\}$ es multiplicativo.
1. Si A es un dominio, entonces $S = A \setminus \{0\}$ es multiplicativo (por def!).
2. Si $\mathfrak{p} \subseteq A$ es un ideal primo, entonces $S = A \setminus \mathfrak{p}$ es multiplicativo (por def!).
3. Si $f \in A$ y definimos $f^0 := 1$, entonces $S = \{f^n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{1, f, f^2, \dots\}$ es multiplicativo.

Def: Sea A un anillo y $S \subseteq A$ subconj multiplicativo. En $A \times S$ definimos la relación de equivalencia siguiente

$$(a,s) \sim (a',s') \iff \exists t \in S \text{ tal que } t(as' - a's) = 0 \text{ en } A.$$

La localización de A respecto a S es el conjunto cociente $S^{-1}A := (A \times S)/\sim$ (ó A_S), donde denotamos por $\frac{a}{s}$ la clase de equivalencia de (a,s).

Ejercicio importante Probar que $S^{-1}A$ es un anillo, donde $\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} \overset{\text{def}}{=} \frac{as'+a's}{ss'}$ y $\frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} \overset{\text{def}}{=} \frac{aa'}{ss'}$.
(ie, las expresiones anteriores están bien definidas!)

Obs:

1. El elemento "$t \in S$" en la definición de $\sim$ es necesaria para que la relación sea transitiva cuando A no es un dominio. Si A dominio y $0 \notin S$ se puede omitir.
2. En general, si $0 \in S$ (ie, queremos "dividir por 0") entonces $S^{-1}A = 0$ (tomar $t = 0$!).
3. La aplicación natural $i_S : A \to S^{-1}A$, $a \mapsto \frac{a}{1}$ es un morfismo de anillos.
   Además, $a \in \ker(i_S) \overset{\text{def}}{\iff} \frac{a}{1} = \frac{0}{1}$ en $S^{-1}A \overset{\text{def}}{\iff} \exists t \in S$ tq $t(a \cdot 1 - 0 \cdot 1) = ta = 0$.
   Así, si definimos $\operatorname{zdiv}(A) := \{a \in A \text{ tq } \exists b \neq 0 \text{ con } ab = 0\}$ los divisores de cero de A, entonces para S tq $0 \notin S$: $i_S : A \hookrightarrow S^{-1}A$ inyectivo $\iff S \cap \operatorname{zdiv}(A) = \emptyset$.

Ejemplos más usados: Sea A un anillo y $S \subseteq A$ multiplicativo.

① Si $S = \{1\}$, entonces $S^{-1}A \cong A$

② Si A dominio y $S = A \setminus \{0\}$, entonces $S^{-1}A \overset{def}{=} \mathrm{Fr}(A)$. En part, si $T \subseteq A\setminus\{0\}$ es otro subconj. multiplicativo entonces $A \xhookrightarrow{i_T} T^{-1}A \hookrightarrow \mathrm{Fr}(A)$ son subanillos.

③ Si $\mathfrak{p} \subseteq A$ ideal primo y $S = A \setminus \mathfrak{p}$, entonces escribimos $A_\mathfrak{p} := S^{-1}A$. Concretamente, un elemento de $A_\mathfrak{p}$ es de la forma $\frac{a}{s}$ con $a \in A$ y $s \notin \mathfrak{p}$.

④ Si $f \in A$ y $S = \{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, entonces escribimos $A_f := S^{-1}A$. En part, $A_f \neq 0$ si y sólo si f <u>no</u> es nilpotente. Concretamente, un elemento de A_f es de la forma $\frac{a}{f^n}$ con $a \in A$ y $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio importante Probar que $A_f \cong A[X]/\langle fX-1 \rangle$ considerando $\varphi : A[X] \twoheadrightarrow A_f,\ X \mapsto \frac{1}{f}$

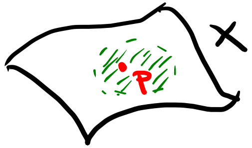
Por ejemplo, si $A = \mathbb{Z}$ y $f = p \in \mathbb{Z}$ es un número primo con ideal generado $\mathfrak{p} = p\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z}_f \overset{def}{=} \left\{ \frac{a}{p^n} \text{ con } a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathbb{Q} \quad \text{y} \quad \mathbb{Z}_\mathfrak{p} = \mathbb{Z}_{\langle p \rangle} \overset{def}{=} \left\{ \frac{a}{b} \text{ con } a \in \mathbb{Z} \text{ y } p \nmid b \right\} \subseteq \mathbb{Q}$$

Hay que tener cuidado con la notación $\mathbb{Z}_p$: En muchos contextos se usa para denotar $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ o al anillo $\mathbb{Z}_p$ de enteros p-ádicos!

Ejemplo fundamental: Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad alg. afín y sea $A := \mathcal{O}(X)$ su $\mathbb{C}$-álgebra de funciones regulares.

① Sea $p \in X$ un punto y $\mathfrak{m}_p := \{ f \in \mathcal{O}(X) \text{ tal que } f(p) = 0 \} \subseteq \mathcal{O}(X)$ el ideal maximal ($\Rightarrow$ primo) asociado a p. Entonces:



$$\mathcal{O}_{X,p} := \mathcal{O}(X)_{\mathfrak{m}_p} \overset{\text{def}}{=} \left\{ \frac{f}{g} \text{ con } f, g \in \mathcal{O}(X) \text{ tal que } g(p) \neq 0 \right\}$$

es llamado el anillo local de X en p (cf. Clase 21, p. 8).

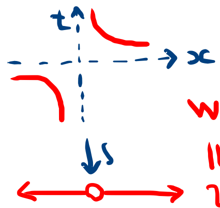
② Sea $f \in \mathcal{O}(X)$ y sea $\mathcal{U}_f := \{ x \in X \text{ tal que } f(x) \neq 0 \}$ abierto principal asociado a f. Entonces, $\mathcal{U}_f$ también es una var. alg. afín!

en otro esp. afín

En efecto, si definimos $Y := \{ (x,t) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^{n+1} \text{ t.q. } x \in X \text{ y } f(x)t = 1 \} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$

cerrado Zariski!

entonces $Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_f$, $(x,t) \mapsto x$ es una biyección



$W = \{ xt = 1 \} \subseteq \mathbb{A}^2$

$\wr\wr$

$\mathcal{U}_f = \{ x \neq 0 \} \subseteq \mathbb{A}^1$

$$\Rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{U}_f) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{O}(Y) \cong \mathcal{O}(X)[T] / \langle fT - 1 \rangle$$

$$\cong \mathcal{O}(X)_f \overset{\text{def}}{=} \left\{ \frac{h}{f^n} \text{ con } h \in \mathcal{O}(X) \text{ y } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Prop: Sea $S \subseteq A$ subconj. multiplicativo y $S^{-1}A$ la respectiva localización con morfismo $i_S : A \to S^{-1}A$, $a \mapsto \frac{a}{1}$ asociado. Entonces:

1. Para todo ideal $I \subseteq A$, tenemos $i_S(I) = \{\frac{a}{s}$ con $a \in I$ y $s \in S\}$.
2. Para todo ideal $J \subseteq S^{-1}A$, tenemos $i_S(i_S^{-1}(J)) = J$.
3. Hay una correspondencia biyectiva

$$\{\text{Ideales primos en } S^{-1}A\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{Ideales primos } \mathfrak{p} \subseteq A \text{ con } \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$$

$$\mathfrak{q} \longmapsto i_S^{-1}(\mathfrak{q})$$

$$i_S(\mathfrak{p}) \longleftarrow\!\shortmid\; \mathfrak{p}$$

Dem: ① $\forall s \in S$ y $a \in I$, $\frac{1}{s} i_S(a) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a}{s} \in i_S(I)$, i.e., $J := \{\frac{a}{s}$ con $a \in I$ y $s \in S\} \subseteq i_S(I)$.
Además, J es un ideal. En part, si $\frac{a}{1} \in i_S(I) \Rightarrow s \cdot (\frac{a}{s}) \in J$ y luego $\frac{a}{1} \in J$ ✓

② $(\subseteq)$ siempre. Veamos $J \subseteq i_S(i_S^{-1}(J))$:
si $\frac{a}{s} \in J \Rightarrow a \in i_S^{-1}(J)$ pues $i_S(a) = s \cdot \frac{a}{s} \in J \overset{①}{\Rightarrow} I := i_S^{-1}(J)$ cumple $\frac{a}{s} \in i_S(\underbrace{i_S^{-1}(J)}_{=I})$ ✓

③ Veamos primero que todo está bien definido:
Notar que $\mathfrak{q} \subseteq S^{-1}A$ primo $\Rightarrow i_S^{-1}(\mathfrak{q}) \subseteq A$ primo (ver Clase 14). En part, $i_S^{-1}(\mathfrak{q}) \cap S = \emptyset$ pues $i_S(S)$ son invertibles en $S^{-1}A$ ✓

<u>Dem</u> (continuación): Similar, si $\mathfrak{p} \subseteq A$ primo tq $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ y consideramos $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in S^{-1}A$ tq $\frac{ab}{st} \in i_S(\mathfrak{p}) \overset{①}{\Longrightarrow} \frac{ab}{st} = \frac{c}{u}$ para ciertos $c \in \mathfrak{p}$ y $u \in S$, ie, $\exists v \in S$ tq $v(abu - stc) = 0$ en A.
$\Rightarrow uvab \in \mathfrak{p} \Rightarrow a \in \mathfrak{p}$ ó $b \in \mathfrak{p}$ (pues $\mathfrak{p}$ primo y $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$) $\Rightarrow \frac{a}{s} \in i_S(\mathfrak{p})$ ó $\frac{b}{t} \in i_S(\mathfrak{p})$ ✓

Finalmente, ② implica $i_S(i_S^{-1}(\mathfrak{q})) = \mathfrak{q}$ $\forall \mathfrak{q} \subseteq S^{-1}A$ primo. Como $\mathfrak{p} \subseteq i_S^{-1}(i_S(\mathfrak{p}))$, basta ver que $i_S^{-1}(i_S(\mathfrak{p})) \subseteq \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \subseteq A$ primo tq $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$: si $a \in i_S^{-1}(i_S(\mathfrak{p}))$
$\Rightarrow i_S(a) \overset{\text{def}}{=} \frac{a}{1} \in i_S(\mathfrak{p})$ es de la forma $\frac{a}{1} = \frac{b}{s}$ ciertos $b \in \mathfrak{p}$ y $s \in S$, ie, $\exists t \in S$ tal que $t(as - b) = 0 \Rightarrow ast \in \mathfrak{p} \Rightarrow a \in \mathfrak{p}$ pues $s, t \notin \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p} \subseteq A$ primo. ∎

<u>Caso particular importante</u>: Si $\mathfrak{p} \subseteq A$ es un ideal primo y $S = A \setminus \mathfrak{p}$, entonces escribimos $i_\mathfrak{p}: A \longrightarrow A_\mathfrak{p}$, $a \longmapsto \frac{a}{1}$ y $IA_\mathfrak{p} := i_\mathfrak{p}(I)$ para todo $I \subseteq A$ ideal.
En part, tenemos una biyección:

$$\{\text{Ideales primos } \mathfrak{q} \subseteq A \text{ tq } \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\} \xrightarrow[\sim]{1:1} \{\text{Ideales primos en } A_\mathfrak{p}\}$$
$$\mathfrak{q} \longmapsto \mathfrak{q}A_\mathfrak{p}$$

Además, dicha biyección preserva inclusiones (ie, $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2 \Leftrightarrow \mathfrak{q}_1 A_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}_2 A_\mathfrak{p}$).

Corolario: Sea $\mathfrak{p} \subseteq A$ un ideal primo. Entonces, $A_{\mathfrak{p}}$ es un anillo local cuyo único ideal maximal está dado por $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \{\frac{a}{s} \text{ con } a \in \mathfrak{p} \text{ y } s \notin \mathfrak{p}\}$. El cuerpo residual asociado $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ es denotado $\kappa(\mathfrak{p})$.

Dem: El ejemplo anterior implica que todo ideal primo de $A_{\mathfrak{p}}$ está contenido en $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, pues $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ implica $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \subsetneq A_{\mathfrak{p}} \Rightarrow \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ es el único ideal maximal de $A_{\mathfrak{p}}$ ■

Ejemplo: Si $A = \mathbb{Z}$. Entonces:

i) Si $\mathfrak{p} = \langle 0 \rangle \Rightarrow A_{\mathfrak{p}} = \mathbb{Q}$ y $\kappa(\mathfrak{p}) = \mathbb{Q}$.

ii) Si $\mathfrak{p} = \langle p \rangle$ con p primo $\Rightarrow A_{\mathfrak{p}} = \{\frac{a}{b} \text{ con } a \in \mathbb{Z} \text{ y } p \nmid b\}$ y $\kappa(\mathfrak{p}) \cong \mathbb{F}_p$.

Ejemplo: Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad alg. afín y $p \in X$ un punto. Entonces,

$$\mathcal{O}_{X,p} = \left\{\frac{f}{g} \text{ con } f, g \in \mathcal{O}(X) \text{ tal que } g(p) \neq 0\right\}$$

es un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{m}_p := \{\frac{f}{g} \text{ con } f, g \in \mathcal{O}(X) \text{ tq } g(p) \neq 0 \text{ y } f(p) = 0\}$, y $\kappa(p) := \mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{m}_p \cong \mathbb{C}$.

Def: Sea $S \subseteq A$ subconj. multiplicativo, y sea M un A-módulo. En $M \times S$ definimos la relación de equivalencia siguiente

$$(m,s) \sim (m',s') \iff \exists\, t \in S \text{ tal que } t(s'm - sm') = 0 \text{ en } M.$$

La localización de M respecto a S es el conjunto cociente $S^{-1}M := (M \times S)/\sim$ (ó M_S), donde denotamos por $\frac{m}{s}$ la clase de equivalencia de (m,s). En part, $S^{-1}M$ es un $S^{-1}A$-módulo resp. a la suma y mult. por escalares dadas por:

$$\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} := \frac{s'm + sm'}{ss'} \quad \text{y} \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{m'}{s'} := \frac{am'}{ss'}.$$

Ejemplos: Sean $f \in A$, $\mathfrak{p} \subseteq A$ un ideal primo y M un A-módulo.

① Si $S = \{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ entonces $S^{-1}M$ se denota M_f. Explícitamente,

$$M_f = \left\{ \frac{m}{f^n} \text{ con } m \in M \text{ y } n \in \mathbb{N} \right\}$$

② Si $S = A \setminus \mathfrak{p}$ entonces $S^{-1}M$ se denota $M_{\mathfrak{p}}$. Explícitamente,

$$M_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{m}{s} \text{ con } m \in M \text{ y } s \notin \mathfrak{p} \right\}$$

Lema: Sea $S \subseteq A$ subconj. multiplicativo, y sea M un A-módulo. Entonces,
$S^{-1}M \cong M \otimes_A S^{-1}A$.

Dem: Consideremos el morfismo A-lineal $\varphi : S^{-1}M \longrightarrow M \otimes_A S^{-1}A$, $\frac{m}{s} \longmapsto m \otimes \frac{1}{s}$.
Notar que φ está bien definido pues si $\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'}$, ie, $\exists t \in S$ tq $t(s'm - sm') = 0$ en M

$$\Rightarrow m \otimes \frac{1}{s} - m' \otimes \frac{1}{s'} = s'm \otimes \frac{1}{ss'} - sm' \otimes \frac{1}{ss'} = t(s'm - sm') \otimes \frac{1}{ss't} = 0$$

De manera similar, la aplicación A-bilineal $M \times S^{-1}A \longrightarrow S^{-1}M$, $(m, \frac{a}{s}) \longmapsto \frac{am}{s}$ induce $\psi : M \otimes_A S^{-1}A \longrightarrow S^{-1}M$, $m \otimes \frac{a}{s} \longmapsto \frac{am}{s}$ la cual está bien definida pues si $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$, ie, $\exists t \in S$ tq $t(as' - a's) = 0$, entonces $t(s'am - sa'm) = 0$, ie, $\frac{am}{s} = \frac{a'm}{s'}$ en $S^{-1}M$.
Finalmente, notamos que φ y ψ son inversas una de la otra y luego $S^{-1}M \cong M \otimes_A S^{-1}A$ ■

Observación / Notación: Sea $\varphi : M \rightarrow N$ morfismo de A-módulos. Entonces

$$\varphi \otimes Id : M \otimes_A S^{-1}A \longrightarrow N \otimes_A S^{-1}A, \quad m \otimes \frac{a}{s} \longmapsto \varphi(m) \otimes \frac{a}{s}$$

induce $S^{-1}\varphi : S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N$, $\frac{m}{s} \longmapsto \frac{\varphi(m)}{s}$ morfismo de $S^{-1}A$-módulos, llamado la localización de φ resp. a S (ie, $S^{-1}(\cdot)$ es "functorial").

Una de las propiedades más importantes de la localización es la exactitud.

Teorema: Sea $S \subseteq A$ subconjunto multiplicativo. Entonces para toda sucesión exacta corta de A-módulos

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0,$$

la sucesión

$$0 \rightarrow S^{-1}M_1 \xrightarrow{S^{-1}\varphi} S^{-1}M_2 \xrightarrow{S^{-1}\psi} S^{-1}M_3 \longrightarrow 0$$

es exacta.

Dem: Dado que $S^{-1}M \cong M \otimes_A S^{-1}A$, y tensorizar es "exacto por la derecha" tenemos que $S^{-1}M_1 \xrightarrow{S^{-1}\varphi} S^{-1}M_2 \xrightarrow{S^{-1}\psi} S^{-1}M_3 \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta.

Luego, basta probar que $S^{-1}\varphi$ es inyectiva:

Sea $\frac{m}{s} \in S^{-1}M_1$ tal que $(S^{-1}\varphi)\left(\frac{m}{s}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varphi(m)}{s} = 0$ en $S^{-1}M_2$, i.e, $\exists\, t \in S$ tal que $t\varphi(m) = 0 \iff \varphi(tm) = 0$, i.e, $tm = 0$ pues φ inyectiva.

$\Rightarrow \frac{m}{s} = \frac{1}{ts} \cdot tm = 0$ en $S^{-1}M_1$ ✓ ∎