Clase 24: Producto tensorial, geometría y exactitud

§41. Producto tensorial de módulos

Recuerdo (ver §20, Clase 10): Si V y W son k-ev, entonces existe $T := V \otimes W$ k-ev (único, módulo un único isomorfismo) junto con $t : V \times W \to V \otimes W$, $(v, w) \mapsto v \otimes w$ aplicación bilineal. Además, verifica la propiedad universal siguiente:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "B"] \arrow[d, "t"'] & \mathcal{U} \\ V \otimes W \arrow[ur, "\exists!\, \hat{B}"'] \arrow[u, phantom, shift left=6, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

"Para todo $\mathcal{U}$ k-ev y para toda $B : V \times W \to \mathcal{U}$ bilineal, existe una única $\hat{B} : V \otimes W \to \mathcal{U}$ lineal tal que $B = \hat{B} \circ t$ (i.e., $\hat{B}(v \otimes w) = B(v, w)$)"

En particular, $\mathrm{Bil}_k(V \times W, \mathcal{U}) \cong \mathrm{Hom}_k(V \otimes W, \mathcal{U})$ para todos $\mathcal{U}, V, W$ k-ev.

La construcción anterior se extiende naturalmente al contexto de A-módulos!

Def: Sean L, M, N tres A-módulos. Una aplicación bilineal es una función
$$B : M \times N \longrightarrow L \,, \quad (m,n) \longmapsto B(m,n)$$
tal que para todo $m \in M$ (resp. $n \in N$) la aplicación
$$B(m,\cdot) : N \to L \quad (\text{resp. } B(\cdot,n) : M \to L)$$
obtenida al fijar una variable, es A-lineal.

Ejemplos

1. Si B es una A-álgebra, el producto $B \times B \to B$, $(b,b') \mapsto bb'$ es A-bilineal.

2. Si M, N son A-módulos, la aplicación "evaluación"
$$ev : M \times \mathrm{Hom}_A(M,N) \longrightarrow N \,, \quad (m,\varphi) \longmapsto \varphi(m)$$
es A-bilineal.

En general, escribimos $\mathrm{Bil}_A(M \times N, L) := \{B : M \times N \to L \text{ aplicación A-bilineal}\}$ al A-módulo de aplicaciones A-bilineales de $M \times N$ en L.

Teorema: Sean M y N dos A-módulos. Entonces, existe un A-módulo $M\otimes_A N$ dotado de una aplicación A-bilineal $t: M\times N \to M\otimes_A N$, $(m,n)\mapsto t(m,n) =: m\otimes n$ verificando la propiedad universal siguiente:

"Para todo A-módulo L y para toda $B: M\times N \to L$ bilineal, existe una **única** $\hat{B}: M\otimes_A N \to L$ aplicación A-lineal tal que $B = \hat{B}\circ t$"

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "B"] \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & L \\ M\otimes_A N \arrow[ur, "\exists!\,\hat{B}"'] & \end{tikzcd}$$

En part, el par $(M\otimes_A N, t)$ es único módulo un único isomorfismo y además $Bil_A(M\times N, L) \cong Hom_A(M\otimes_A N, L)$.

Idea de Dem (idem que si $A = k$ cuerpo!):

Considerar el A-módulo libre $A^{(M\times N)}$ con base canónica $\{e_{(m,n)}\}_{(m,n)\in M\times N}$ y cocientamos por el submódulo $K \subseteq A^{(M\times N)}$ generado por

$e_{(m+m',n)} - e_{(m,n)} - e_{(m',n)}$; $e_{(m,n+n')} - e_{(m,n)} - e_{(m,n')}$; $e_{(am,n)} - a\,e_{(m,n)}$;
$e_{(m,an)} - a\,e_{(m,n)} \rightsquigarrow M\otimes_A N := A^{(M\times N)}/K$ con $m\otimes n := [e_{(m,n)}]$.

La aplicación $t: M\times N \to M\otimes_A N$, $(m,n)\mapsto m\otimes n$ es bilineal y verifica todo lo pedido ■

Tal como para espacios vectoriales, el producto tensorial de A-módulos cumple lo siguiente.

Prop: Sean M, M', N, N' A-módulos. Entonces:

① **Functorialidad:** Si $\varphi : M \to N$ y $\psi : M' \to N'$ son A-lineales, entonces existe un único morfismo A-lineal $\varphi \otimes \psi : M \otimes_A M' \to N \otimes_A N'$ que verifica $(\varphi \otimes \psi)(m \otimes m') = \varphi(m) \otimes \psi(m')$ para todos $m \in M$ y $m' \in M'$.

② **Propiedades monoidales:** Hay isomorfismos canónicos:

a) $A \otimes_A M \xrightarrow{\sim} M$, $a \otimes m \mapsto am$ (con inversa $m \mapsto 1 \otimes m$).

b) $(M \oplus M') \otimes_A N \xrightarrow{\sim} (M \otimes_A N) \oplus (M' \otimes_A N)$, $(m, m') \otimes n \mapsto (m \otimes n, m' \otimes n)$.

c) $M \otimes_A N \xrightarrow{\sim} N \otimes_A M$, $m \otimes n \mapsto n \otimes m$.

d) $M \otimes_A (M' \otimes_A N) \xrightarrow{\sim} (M \otimes_A M') \otimes_A N$, $m \otimes (m' \otimes n) \mapsto (m \otimes m') \otimes n$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$: Probar el resto (la misma idea funciona).

Dem: Para 2c), considerar $M \times N \to N \otimes_A M$, $(m, n) \mapsto n \otimes m$ bilineal!

Prop Univ $\Rightarrow$ $\exists!\ \varphi : M \otimes_A N \to N \otimes_A M$ tq $\varphi(m \otimes n) = n \otimes m$. Similar: $\exists!\ \psi : N \otimes_A M \to M \otimes_A N$ tal que $\psi(n \otimes m) = m \otimes n$, y luego $(\psi \circ \varphi)(m \otimes n) = m \otimes n$. Como los "tensores puros" $m \otimes n$ generan $M \otimes_A N \Rightarrow \psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{M \otimes_A N}$. Similar para $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{N \otimes_A M}$ ∎

Ejemplos: Sean M y N dos A-módulos, y sean $I, J \subseteq A$ ideales.

① Si $M \cong A^m$ y $N \cong A^n$ son libres fin. generados, entonces:

$$M \otimes_A N \cong A^m \otimes_A (A \oplus \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \oplus A) \cong (A^m \otimes_A A) \oplus \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \oplus (A^m \otimes_A A) \cong A^m \oplus \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \oplus A^m \cong A^{mn}.$$

② $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $A^n \otimes_A M \cong M^n \overset{\text{def}}{=} M^{\oplus n}$.

③ Sup. que $I, J \subseteq A$ son primos relativos (i.e., $I + J = A \iff \exists a \in I, \exists b \in J$ tq $a + b = 1$).
En $A/I \otimes_A A/J$ consideremos $[x] \otimes [y]$ con $x, y \in A$ y calculamos:

$$[x] \otimes [y] = (a+b)([x] \otimes [y]) = \underbrace{[ax]}_{=[0]} \otimes [y] + [x] \otimes \underbrace{[by]}_{=[0]} = 0 \implies A/I \otimes_A A/J = 0$$

$[x] \otimes [y]$ generan $A/I \otimes_A A/J$

Eg. Si $n, m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ son primos relativos, entonces $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0$.

④ $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea G un grupo abeliano finito. Probar que $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.

⑤ $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$, pues $\varphi : \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, $r \mapsto 1 \otimes r$ es un isomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos con inversa $\psi : \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$, $p \otimes q \mapsto pq$ (pues $1 \otimes \frac{ab}{cd} = \frac{a}{c} c \otimes \frac{b}{cd} = \frac{a}{c} \otimes \frac{b\cancel{c}}{\cancel{c}d}$).

Construcción (Producto tensorial de álgebras): Sea A un anillo, y sean B y C dos A-álgebras (ie, A-módulos que además son anillos). Entonces, la aplicación

$$B \times C \times B \times C \longrightarrow B \otimes_A C, \quad (b, c, b', c') \longmapsto bb' \otimes cc'$$

es A-multilineal. Luego, la Prop. Univ. del Producto tensorial (aplicada fijando las primeras dos variables, y luego a las últimas dos) implica:

$\exists!$ $(B \otimes_A C) \times (B \otimes_A C) \longrightarrow B \otimes_A C$ con $(b \otimes c, b' \otimes c) \longmapsto bb' \otimes cc' =: (b \otimes c) \cdot (b' \otimes c')$

aplicación A-bilineal. Así, el A-módulo $B \otimes_A C$ es una A-álgebra!

Ejemplo concreto: Veamos que $A[X,Y] \underset{A\text{-álg}}{\cong} A[X] \otimes_A A[Y]$. Para ello, consideremos

$$\varphi : A[X] \otimes_A A[Y] \longrightarrow A[X,Y], \quad f \otimes g \longmapsto fg$$

y

$$\psi : A[X,Y] \longrightarrow A[X] \otimes_A A[Y], \quad \sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j \longmapsto \sum_{i,j} a_{ij} X^i \otimes Y^j$$

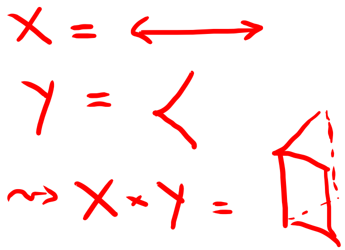
Dado que $(\psi \circ \varphi)(X^i \otimes Y^j) = X^i \otimes Y^j$, $(\varphi \circ \psi)(X^i Y^j) = X^i Y^j$, y que los $X^i \otimes Y^j$ (resp. $X^i Y^j$) generan $A[X] \otimes_A A[Y]$ (resp. $A[X,Y]$) como A-módulo $\Rightarrow A[X,Y] \underset{A\text{-mód}}{\cong} A[X] \otimes_A A[Y]$

Veamos que es un isomorfismo de A-álgebras calculando:

$$\varphi((f \otimes g) \cdot (f' \otimes g')) \overset{\text{def}}{=} \varphi(ff' \otimes gg') = ff'gg' \overset{\text{def}}{=} \varphi(f \otimes g) \cdot \varphi(f' \otimes g') \text{ en } A[X,Y] \checkmark$$

Ejercicio Sean $I, J \subseteq A$ ideales. Probar que $A/I \otimes_A A/J \cong A/(I+J)$ como A-álgebras.

Interpretación geométrica: Sean $X = V(I) \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y = V(J) \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades alg. afines. Entonces $X \times Y = \{(a,b) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{mn}$ tq $f(a) = g(b) = 0 \ \forall f \in I, g \in J\} \subseteq \mathbb{A}^{mn}$ es una variedad alg. afín también.



Más aún, $\mathcal{O}(X \times Y) \cong \mathcal{O}(X) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(Y)$ son isomorfas como $\mathbb{C}$-álgebras!

Si $X = \mathbb{A}^n$ e $Y = \mathbb{A}^m$ esto es consecuencia del "Ejemplo Concreto" anterior (pues implica $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_m] \cong \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m]$). En general, consideramos $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{O}(X)$ e $y_1, \dots, y_m \in \mathcal{O}(Y)$ generadores y definimos

$$\varphi : \mathcal{O}(X) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X \times Y), \quad \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i \otimes y_j \longmapsto \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i y_j$$

y se verifica que φ da el isomorfismo deseado. **Ejercicio**** Verificarlo.

§42. Exactitud a la derecha del producto tensorial

Recordemos que si $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \to 0$ (*) es una sucesión exacta de A-módulos, entonces: $\forall N$ la suc. $0 \to \mathrm{Hom}_A(M_3,N) \xhookrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}_A(M_2,N) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Hom}_A(M_1,N)$ (**) es exacta.

$f \longmapsto f\circ\psi$; $g \longmapsto g\circ\varphi$

Comencemos por observar que el recíproco es cierto:

Obs útil (Ejercicio): Si (**) es exacta para todo N, entonces (*) es exacta.

Indicación: Para probar que $\ker(\psi) \subseteq \mathrm{Im}(\varphi)$ considerar $N := M_2/\mathrm{Im}(\varphi)$ y $g: M_2 \twoheadrightarrow N$ la proyección al cociente. Probar que $g \in \mathrm{Im}(\psi^*)$ y deducir que $\ker(\psi) \subseteq \mathrm{Im}(\varphi)$. La inclusión $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \ker(\psi)$ y la igualdad $\mathrm{Im}(\psi) = M_3$ se prueban de manera similar escogiendo N y $f: M_3 \to N$ convenientes.

Teorema: Sean M, N, P, M_1, M_2, M_3 A-módulos arbitrarios. Entonces:

① $\mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N,P)) \cong \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P)$.

② Sea $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0$ una sucesión exacta. Entonces, para todo N

$$M_1 \otimes_A N \xrightarrow{\varphi \otimes Id_N} M_2 \otimes_A N \xrightarrow{\psi \otimes Id_N} M_3 \otimes_A N \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

Dem: ① Dados $\alpha \in \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N,P))$, definimos $\beta \in \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P)$ ("bilineal"!) por $\beta(m \otimes n) := \alpha(m)(n)$ en P. La igualdad anterior permite también definir α en términos de β considerando la corresp. $B: M \times N \to P$ bilineal ("fijar la primera variable"). Ambas aplicaciones son A-lineales e inversas una de la otra ✓

② La Obs útil aplicada a $\mathrm{Hom}_A(N,P)$ nos da la suc. exacta $\forall N$ y $\forall P$:

$$0 \to \underbrace{\mathrm{Hom}_A(M_3, \mathrm{Hom}_A(N,P))}_{\overset{①}{\cong} \mathrm{Hom}_A(M_3 \otimes_A N, P)} \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Hom}_A(M_2, \mathrm{Hom}_A(N,P))}_{\overset{①}{\cong} \mathrm{Hom}_A(M_2 \otimes_A N, P)} \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Hom}_A(M_1, \mathrm{Hom}_A(N,P))}_{\overset{①}{\cong} \mathrm{Hom}_A(M_1 \otimes_A N, P)}$$

$\overset{\text{Obs útil}}{\Longrightarrow}$ $M_1 \otimes_A N \longrightarrow M_2 \otimes_A N \longrightarrow M_1 \otimes_A N \longrightarrow 0$ es exacta $\forall N$ ✓ ■

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Dar un ejemplo de $M_1 \hookrightarrow M_2$ submódulo tal que para cierto A-módulo N se tenga que $M_1 \otimes_A N$ <u>no</u> es un submódulo de $M_2 \otimes_A N$.

[<u>Indicación</u>: Considerar $A = \mathbb{Z}$, $M_1 = 2\mathbb{Z} \hookrightarrow M_2 = \mathbb{Z}$ y $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.]

[<u>Corolario</u>: Sea $I \subseteq A$ un ideal y M un A-módulo. Entonces, $M/IM \cong M \otimes_A A/I$.

<u>Dem</u>: La sucesion $0 \to I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/I \to 0$ es exacta. Luego, la sucesión

$$M \otimes_A I \xrightarrow{\alpha := Id_M \otimes i} M \otimes_A A \xrightarrow{\beta := Id_M \otimes \pi} M \otimes_A A/I \to 0$$

es exacta.

Además, $\varphi : M \otimes_A A \xrightarrow{\sim} M$, $m \otimes a \mapsto am$ es un isomorfismo. Bajo este isomorfismo φ, tenemos (por def) que $\mathrm{Im}(Id_M \otimes i)$ se identifica con IM, y luego:

$$M \otimes_A A/I = \mathrm{Im}(\beta) \underset{\text{Noether}}{\cong} (M \otimes_A A)/\ker(\beta) \underset{\uparrow \text{Exactitud}}{=} (M \otimes_A A)/\mathrm{Im}(\alpha) \underset{\uparrow \text{Por } \varphi}{\cong} M/IM \quad \blacksquare$$

Cultura general Sean V y W $\mathbb{R}$-e.v. normados (e.v.n.) y $f:\Omega \to W$ función de clase $\mathcal{C}^\infty$, donde $\Omega \subseteq V$ abierto no-vacío.

Para todo $a \in \Omega$, la derivada $f'(a) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)$ es la única aplicación lineal que cumple $f(a+h) = f(a) + f'(a)(h) + o(h)$, donde $o(0)=0$ y $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{o(h)}{\|h\|} = 0$.

De manera similar, $f''(a) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V\otimes V, W)$ y

$$f'''(a) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W))) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V\otimes V, W))$$
$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V\otimes V\otimes V, W)$$

En general, si $T^K V := V \overset{K \text{ veces}}{\otimes \cdots \otimes} V$ entonces $f^{(K)}(a) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T^K V, W)$.

En part, si $V \cong \mathbb{R}^n$ y $W \cong \mathbb{R}^m$ son de dimensión finita, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T^m V, W)$ es de dimensión $n^K m$ y las coord. de $f^{(K)}(a)$ resp. a la base inducida por las bases canónicas de V y W son las $\frac{\partial^K f_j}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_K}}(a)$ para $j \in \{1, \dots, m\}$.