Clase 23: Módulos proyectivos e inyectivos, Lema de la serpiente

§39. Módulos proyectivos e inyectivos

Recordemos que si $\varphi : M \to M'$ es un morfismo de A-módulos y N un A-módulo, definimos el:

•) Pullback φ^* de φ mediante

$$\begin{aligned} \varphi^* : \mathrm{Hom}_A(M', N) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N) \\ f &\longmapsto f \circ \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi^*(f)"'] & M' \arrow[d, "f"] \\ & N \end{tikzcd}$$

•) Pushforward φ_* de φ mediante

$$\begin{aligned} \varphi_* : \mathrm{Hom}_A(N, M) &\to \mathrm{Hom}_A(N, M') \\ g &\longmapsto \varphi \circ g \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "\varphi_*(g)"] & \\ M \arrow[rr, "\varphi"] & & M' \end{tikzcd}$$

Más aún, se dejó como ejercicio verificar que φ^* y φ_* son A-lineales.

Dado que el pullback (resp. pushforward) revierte (resp. preserva) el orden, decimos que $\mathrm{Hom}_A(\cdot, N)$ es contravariante (resp. $\mathrm{Hom}_A(N, \cdot)$ es covariante).

El sgte resultado detalla cómo se comportan $\mathrm{Hom}_A(\cdot, N)$ y $\mathrm{Hom}_A(N, \cdot)$ al considerar sucesiones exactas. El método de prueba se llama cacería de diagramas (o diagram chasing).

<u>Prop</u>: ① Sea $0 \to N_1 \xrightarrow{\alpha} N_2 \xrightarrow{\beta} N_3$ una sucesión exacta y sea M un A-módulo. Entonces, la sucesión

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M, N_1) \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Hom}_A(M, N_2) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}_A(M, N_3) \text{ es exacta.}$$

② Sea $M_1 \xrightarrow{\gamma} M_2 \xrightarrow{\delta} M_3 \longrightarrow 0$ una sucesión exacta y sea N un A-módulo. Entonces, la sucesión

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M_3, N) \xrightarrow{\delta^*} \mathrm{Hom}_A(M_2, N) \xrightarrow{\gamma^*} \mathrm{Hom}_A(M_1, N) \text{ es exacta.}$$

<u>Dem de ②</u>: Por exactitud, $\delta \circ \gamma = 0$ y luego $0 = (\delta \circ \gamma)^* \overset{\text{dy}}{=} \gamma^* \circ \delta^*$, ie, $\mathrm{Im}(\delta^*) \subseteq \ker(\gamma^*)$.
Veamos que $\ker(\gamma^*) \subseteq \mathrm{Im}(\delta^*)$: Sea $f: M_2 \to N$ morfismo A-lineal tal que $\gamma^*(f) = 0$, ie, $f \circ \gamma : M_1 \to N$ es tal que $f(\gamma(m_1)) = 0 \ \forall m_1 \in M_1$, ie, $\mathrm{Im}(\gamma) \subseteq \ker(f)$.
La Propiedad Universal del Cociente y el Teorema del Isomorfismo de Noether implican:

$$\exists! \ g = \hat{f} : M_1 / \mathrm{Im}(\gamma) \underset{\uparrow}{=} M_1 / \ker(\delta) \underset{\uparrow}{\cong} \mathrm{Im}(\delta) \longrightarrow N, \text{ con } g(\delta(m_1)) = f(m_1)$$

Por exactitud, $\mathrm{Im}(\gamma) = \ker(\delta)$ — Noether — para todo $m_1 \in M_1$.

<u>Dem</u> (continuación): De lo anterior, $f = g \circ \delta \overset{\text{def}}{=} \delta^*(g)$ y luego $\ker(\gamma^*) \subseteq \operatorname{Im}(\delta^*)$ ✓

Veamos finalmente que δ^* es inyectiva: Sea $g : M_3 \to N$ morfismo A-lineal tal que $\delta^*(g) = 0$, i.e., $g \circ \delta : M_2 \to N$ es tal que $g(\delta(m_2)) = 0 \ \forall m_2 \in M_2$.

Por exactitud, tenemos que δ es sobreyectiva y luego para todo $m_3 \in M_3$ existe $m_2 \in M_2$ tal que $m_3 = \delta(m_2) \Rightarrow g(m_3) = g(\delta(m_2)) = 0 \ \forall m_3 \in M_3$, i.e., $g = 0$ ✓ $\blacksquare$

<u>Ejemplos importantes</u>: Los siguientes (contra) ejemplos muestran que, en general, <u>no</u> podemos esperar que $\operatorname{Hom}_A(M, \cdot)$ o $\operatorname{Hom}_A(\cdot, N)$ envíen sucesiones exactas en sucesiones exactas:

(1) Si $N_2 \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N_3 \to 0$ es exacta (i.e., β sobreyectivo), <u>no</u> necesariamente tenemos que $\beta_* : \operatorname{Hom}_A(M, N_2) \to \operatorname{Hom}_A(M, N_3)$, $g \longmapsto \beta \circ g$ es sobreyectivo. Concretamente, dada $f : M \to N_3$ <u>no</u> siempre es posible completar el diagrama

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "\exists ?"'] \arrow[d, "f"] \\ N_2 \arrow[r, two heads, "\beta"] & N_3 \end{tikzcd}$$

Eg. Si $A = \mathbb{Z}$, $\beta : N_2 = \mathbb{Z} \twoheadrightarrow N_3 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $n \longmapsto [n]_2$, $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y $f = \mathrm{Id} : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Esto pues $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \{0\}$.

② Si $0 \to M_1 \xrightarrow{\gamma} M_2$ es exacta (i.e., γ inyectiva), **no** necesariamente tenemos que $\gamma^* : \mathrm{Hom}_A(M_2, N) \to \mathrm{Hom}_A(M_1, N)$, $f \mapsto f \circ \gamma$ es sobreyectiva. Concretamente, dada $g : M_1 \to N$ **no** siempre es posible completar el diagrama

$$\begin{tikzcd} N & \\ M_1 \arrow[u, "g"] \arrow[r, hook, "\gamma"'] & M_2 \arrow[ul, dashed, "\exists ?"'] \end{tikzcd}$$

cf. Teorema de Extensión de Hahn-Banach!

Eg. Si $A = \mathbb{Z}$, $\gamma : M_1 = 2\mathbb{Z} \hookrightarrow M_2 = \mathbb{Z}$ es la inclusión, $N = \mathbb{Z}$, y $g : 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto \frac{n}{2}$. En efecto, si existiera $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $g = \gamma^*(f) = f \circ \gamma$ entonces $(f \circ \gamma)(2) = f(\gamma(2)) = f(2) = 2f(1)$, pero $g(2) = 1$ $\lightning$

Def (Cartan-Eilenberg 1956): Un A-módulo P es proyectivo si para todos A-módulos N_2, N_3 y todo morfismo sobreyectivo $N_2 \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N_3$, el pushforward

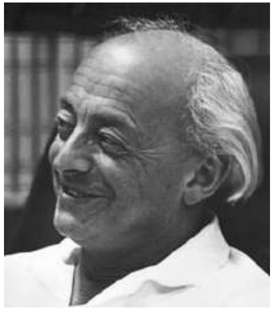
$$\beta_* : \mathrm{Hom}_A(P, N_2) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, N_3)$$

es sobreyectivo (i.e., $\forall f : P \to N_3$, $\exists g : P \to N_2$ tal que $f = \beta_*(g) \overset{\mathrm{def}}{=} \beta \circ g$). Equivalentemente, para toda sucesión exacta corta $0 \to N_1 \overset{\alpha}{\hookrightarrow} N_2 \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N_3 \to 0$, la sucesión

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(P, N_1) \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Hom}_A(P, N_2) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}_A(P, N_3) \to 0$$

es exacta.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que todo A-módulo libre es proyectivo. En part, si $A = k$ es un cuerpo entonces todo k-ev es proyectivo.



La siguiente noción, introducida por Reinhold Baer en 1940, es extremadamente importante en álgebra homológica:

Def (Baer 1940): Un A-modulo I es inyectivo si para todos A-módulos M_1, M_2 y todo morfismo inyectivo $M_1 \overset{\gamma}{\hookrightarrow} M_2$, el pullback

$$\gamma^* : \operatorname{Hom}_A(M_2, I) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}_A(M_1, I)$$

es sobreyectivo (ie, $\forall f : M_1 \to I$, $\exists g : M_2 \to I$ tal que $f = \gamma^*(g) \overset{\text{def}}{=} g \circ \gamma$). Equivalentemente, para toda sucesión exacta corta $0 \to M_1 \overset{\gamma}{\hookrightarrow} M_2 \overset{\delta}{\twoheadrightarrow} M_3 \longrightarrow 0$, la sucesión

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(M_3, I) \xrightarrow{\delta^*} \operatorname{Hom}_A(M_2, I) \xrightarrow{\gamma^*} \operatorname{Hom}_A(M_1, I) \to 0$$

es exacta.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que si $A = k$ es un cuerpo, entonces todo k-ev es inyectivo.

Hecho (sin demostración): Sea A un anillo. El criterio de Baer (1940) afirma que:

Un A-módulo M es inyectivo $\Leftrightarrow$ Para todo ideal $I \subseteq A$ y todo morfismo de A-módulos $\varphi: I \to M$, $\exists\, \Phi: A \to M$ morfismo de A-módulos tal que $\Phi|_I = \varphi$ (ie, Φ extiende a φ).

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $M = \mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.

§40. Lema de la serpiente

Recuerdo: Sea $f: M \to N$ un morfismo de A-módulos, entonces la sucesión

$$0 \to \ker(f) \xhookrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{p} \operatorname{coker}(f) \overset{\text{def}}{=} N/\operatorname{Im}(f) \to 0$$

es exacta.

El llamado Lema de la serpiente (Cartan-Eilenberg 1956) establece que: "Dado un morfismo entre dos sucesiones exactas cortas, existe una sucesión exacta larga de kernels y cokernels asociada"

ie, no es corta

Lema de la serpiente: Dados un diagrama conmutativo de A-módulos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & M_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "f'"] & N_2 \arrow[r, "g'"] & N_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde las filas son sucesiones exactas, existe una sucesión exacta

$$0 \to \ker(\alpha) \to \ker(\beta) \to \ker(\gamma) \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}(\alpha) \to \operatorname{coker}(\beta) \to \operatorname{coker}(\gamma) \to 0,$$

donde δ es llamado el morfismo de conexión.

Obs: Aquí, las flechas horizontales rojas (resp. azules) indican que podemos agregarlas o removerlas simultáneamente de ambas sucesiones exactas.

Concretamente:

i) Si $f: M_1 \hookrightarrow M_2$ es inyectivo, entonces $\ker(\alpha) \hookrightarrow \ker(\beta)$ también.

ii) Si $g': N_2 \twoheadrightarrow N_3$ es sobreyectivo, entonces $\operatorname{coker}(\beta) \twoheadrightarrow \operatorname{coker}(\gamma)$ también.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que si α y γ son isomorfismos, entonces β también.

Idea de Dem (cacería de diagramas): Consideremos el diagrama, donde:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \ker(\alpha) \arrow[r, "f_K"] \arrow[d, "\iota_1"] & \ker(\beta) \arrow[r, "g_K"] \arrow[d, "\iota_2"] & \ker(\gamma) \ni m_3 \arrow[d, "\iota_3"] \arrow[dddll, dashed, "\delta"] & \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & M_2 \ni m_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & M_3 \ni m_3 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \ni n_1 \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p_1"] & N_2 \ni \beta(m_2) \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "p_2"] & N_3 \arrow[r] \arrow[d, "p_3"] & 0 \\
 & \operatorname{coker}(\alpha) \ni [n_1] \arrow[r, "f'_C"] \arrow[d] & \operatorname{coker}(\beta) \arrow[r, "g'_C"] \arrow[d] & \operatorname{coker}(\gamma) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

$m_2 \mapsto m_3$

$n_1 \mapsto \beta(m_2)$

f_K y g_K (resp. f'_C y g'_C) son los morfismos inducidos por f y g a nivel de ker (resp. coker).

(Eg. si $m_1 \in \ker(\alpha) \subseteq M_1$, entonces $f(m_1) \in M_2$ cumple $\beta(f(m_1)) = f'(\alpha(m_1)) = 0$, ie, $f(m_1) \in \ker(\beta)$ $\Rightarrow f_K : \ker(\alpha) \to \ker(\beta)$, $m_1 \mapsto f(m_1)$ bien def).

El morfismo de conexión

$$\delta : \ker(\gamma) \to \operatorname{coker}(\alpha)$$

se obtiene por cacería de diagramas:

Sea $m_3 \in \ker(\gamma)$. Como g sobreyectivo, $\exists\, m_2 \in M_2$ tq $g(m_2) = m_3$. Además,

$$g'(\beta(m_2)) = \gamma(g(m_2)) \overset{\text{def}}{=} \gamma(m_3) = 0 \checkmark$$

$\Rightarrow \beta(m_2) \in \ker(g') = \operatorname{Im}(f')$, ie, $\exists\, n_1 \in N_1$ tq $f'(n_1) = \beta(m_2)$. Definimos entonces

$$\delta(m_3) := [n_1] \text{ en } \operatorname{coker}(\alpha) \overset{\text{def}}{=} N_1/\operatorname{Im}(\alpha) \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$* Verificar que δ está bien definido y que la suc. de kernels y cokernels es exacta.

Obs importante: La relevancia teórica del Lema de la serpiente es que permite asociar a sucesiones exactas cortas de complejos sucesiones exactas largas en cohomología.

Más precisamente, si $\varphi^\bullet : M^\bullet \to N^\bullet$ es un morfismo de complejos de A-módulos entonces

$$K^\bullet = \ker(\varphi^\bullet) := \{(\ker(\varphi^i), d_M^i)\}_{i\in\mathbb{Z}} \quad \text{y} \quad C^\bullet = \operatorname{coker}(\varphi^\bullet) := \{(\operatorname{coker}(\varphi^i), \hat{d}_N^i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$$

restricción

inducido por d_N^i vía la prop. univ. del cociente

son complejos de A-módulos.

En part, si denotamos por $0^\bullet$ al complejo nulo, entonces decimos que

$$0^\bullet \to L^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} M^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} N^\bullet \to 0^\bullet$$

Recuerdo: $H^i(M^\bullet)$ es $\ker(d_M^i)/\operatorname{Im}(d_M^{i-1})$

es una sucesión exacta corta de complejos si

$$\ker(f^\bullet) = 0^\bullet, \ \operatorname{Im}(f^\bullet) = \ker(g^\bullet) \ \text{y} \ \operatorname{coker}(g^\bullet) = 0^\bullet \ (\text{ie}, \operatorname{Im}(g^\bullet) = N^\bullet).$$

El Lema de la serpiente implica que existe

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{i-1}} H^i(L^\bullet) \xrightarrow{H^i(f^\bullet)} H^i(M^\bullet) \xrightarrow{H^i(g^\bullet)} H^i(N^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(L^\bullet) \xrightarrow{H^{i+1}(f^\bullet)} \cdots$$

sucesión exacta larga en cohomología, donde $\{\delta^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ son los morfismos de conexión y donde $H^i(f^\bullet)$, $H^i(g^\bullet)$ son los morfismos asociados a $f^\bullet$ y $g^\bullet$ (cf. Ejercicio Clase 22).

La idea es la sgte: Para simplicar, en algunas partes escribimos d^i para d_L^i, d_M^i, d_N^i.

Para $i \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L^i \arrow[r, "f^i"] \arrow[d, "d_L^i"'] & M^i \arrow[r, "g^i"] \arrow[d, "d_M^i"] & N^i \arrow[r] \arrow[d, "d_N^i"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L^{i+1} \arrow[r, "f^{i+1}"] & M^{i+1} \arrow[r, "g^{i+1}"] & N^{i+1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

1° Lema de la serpiente nos da 2 sucesiones exactas:

$0 \to \ker(d_L^i) \to \ker(d_M^i) \to \ker(d_N^i)$ y $\operatorname{coker}(d_L^i) \to \operatorname{coker}(d_M^i) \to \operatorname{coker}(d_N^i) \to 0$

2° $\operatorname{Im}(d^{i-1}) \subseteq \ker(d^i) \Rightarrow \exists!\ \hat{d}_L^i : L^i/\operatorname{Im}(d^{i-1}) \longrightarrow L^{i+1}$ tq $\operatorname{Im}(\hat{d}_L^i) = \operatorname{Im}(d_L^i) \subseteq \ker(d_L^{i+1})$

y $\ker(\hat{d}_L^i) = \ker(d_L^i)/\operatorname{Im}(d^{i-1}) \overset{\text{def}}{=} H^i(L^\bullet)$ (idem para $M^\bullet$ y $N^\bullet$).

3° De lo anterior, obtenemos

$$\begin{tikzcd} & L^i/\operatorname{Im}(d_L^{i-1}) \arrow[r, "\hat{f}^i"] \arrow[d, "\hat{d}_L^i"', "2°"] & M^i/\operatorname{Im}(d_M^{i-1}) \arrow[r, "\hat{g}^i"] \arrow[d, "\hat{d}_M^i"', "2°"] & N^i/\operatorname{Im}(d_N^{i-1}) \arrow[r, "1°"] \arrow[d, "\hat{d}_N^i"', "2°"] & 0 \\ 0 \arrow[r, "1°"] & \ker(d_L^{i+1}) \arrow[r, "f^{i+1}"] & \ker(d_M^{i+1}) \arrow[r, "g^{i+1}"] & \ker(d_N^{i+1}) & \end{tikzcd}$$

Dado que $\operatorname{coker}(\hat{d}_L^i) \overset{\text{def}}{=} \ker(d_L^{i+1})/\operatorname{Im}(\hat{d}_L^i) \overset{2°}{=} \ker(d_L^{i+1})/\operatorname{Im}(d_L^i) \overset{\text{def}}{=} H^{i+1}(L^\bullet)$, una segunda aplicación del lema de la serpiente nos da la sucesión exacta:

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{i-1}} H^i(L^\bullet) \to H^i(M^\bullet) \to H^i(N^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(L^\bullet) \to H^{i+1}(M^\bullet) \to H^{i+1}(N^\bullet) \xrightarrow{\delta^{i+1}} \cdots \blacksquare$$