Clase 22: Un primer acercamiento a la Cohomología

§38 Sucesiones exactas y complejos

En palabras simples, el álgebra homológica busca medir qué tan lejos está un morfismo de ser inyectivo (cf. kernel), sobreyectivo (cf. cokernel), y comprender cómo se relacionan varios morfismos $\rightsquigarrow$ sucesión exacta, complejos y cohomología / homología

Cultura general: Esto último es muy útil en topología, así como en análisis:

Let Ω be a bounded regular and connected open set in $\mathbb{R}^N$ with $N \geq 3$. We are looking for a map u from Ω into $\mathbb{R}$ such that

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
-\Delta u &= u^{(N+2)/(N-2)} \quad \text{in} \quad \Omega, \\
u &> 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\
u &= 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega.
\end{aligned}
$$

We shall denote by $H_d(\Omega; \mathbb{Z}_2)$ the homology of dimension d of Ω with $\mathbb{Z}_2$-coefficients.

[A. Bahri, J.-M. Coron] (1998)

THEOREM 1. *If there exists a positive integer d such that $H_d(\Omega; \mathbb{Z}_2) \neq 0$, then* (1) *has a solution.*

Obs: Grandes personajes contribuyeron en desarrollar y simplificar la teoría $\rightsquigarrow$ Poincaré, Alexander, de Rham, Pontryagin, Kolmogorov, Whitney, Čech, ...

También subconjuntos funcionan

Def: Sea $\{M^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ una colección de A-módulos, y sea $\{d^i : M^i \to M^{i+1}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ una colección de morfismos A-lineales (que llamamos diferenciales). Decimos que

$$M^\bullet = (M^\bullet, d^\bullet) : \quad \cdots \xrightarrow{d^{i-2}} M^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} M^i \xrightarrow{d^i} M^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots$$

es: ① Un complejo si $d^{i+1}\circ d^i = 0$ (i.e, $\mathrm{Im}(d^i) \subseteq \ker(d^{i+1})$) para todo $i\in\mathbb{Z}$.

② Una sucesión exacta si $\mathrm{Im}(d^i) = \ker(d^{i+1})$ para todo $i\in\mathbb{Z}$.

Además, decimos que $M^\bullet$ es un complejo positivo si $M^i = 0 \ \forall i<0$.

morfismo nulo

Ejemplos: Sean $f: M\to N$ y $g: N\to P$ morfismos de A-módulos.

① $0 \xrightarrow{0} M \xrightarrow{f} N$ es exacta $\overset{\text{def}}{\iff} \{0_M\} = \mathrm{Im}(0) = \ker(f) \iff f$ inyectivo.

② $N \xrightarrow{g} P \xrightarrow{0} 0$ es exacta $\overset{\text{def}}{\iff} \mathrm{Im}(g) = \ker(0) = P \iff g$ sobreyectivo.

③ Una sucesión exacta corta es una sucesión exacta de la forma

$$0 \to M \xhookrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$$

Aquí, la exactitud se traduce en que f inyectivo, g sobreyectivo, y $\ker(g) = \mathrm{Im}(f)$.

En part, en este caso tenemos $\mathrm{coker}(f) \overset{\text{def}}{=} N/\mathrm{Im}(f) = N/\ker(g) \underset{\text{Noether}}{\cong} \mathrm{Im}(g) = P$.

Ejemplo:

① Si $N = M \oplus P$, entonces $0 \to M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{pr_2} P \to 0$ es una sucesión exacta corta.

$m \longmapsto (m,0)$; $(a,b) \longmapsto b$

② Si $A = \mathbb{Z}$, entonces $0 \to \underbrace{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}_{\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \xhookrightarrow{i} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ es una sucesión exacta corta ($\neq$ ①)

$a \longmapsto a$; $b \longmapsto [b]_2$

③ $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $f: M \to N$ un morfismo de A-módulos. Probar que la sucesión

$$0 \to \ker(f) \xhookrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} \operatorname{coker}(f) \to 0$$

es exacta. En part, si $M \subseteq N$ submódulo entonces $0 \to M \hookrightarrow N \twoheadrightarrow M/N \to 0$ exacta.

El objetivo de la cohomología/homología es "medir" qué tan lejos está un complejo de ser exacto:

ie, $d^{i+1} \circ d^i = 0 \iff \operatorname{Im}(d^i) \subseteq \ker(d^{i+1})$ $\forall i$

Def: Sea $(M^\bullet, d^\bullet)$ un complejo de A-módulos dado por

$$M^\bullet : \cdots \xrightarrow{d^{i-2}} M^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} M^i \xrightarrow{d^i} M^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots$$

Para $i \in \mathbb{Z}$, definimos el i-ésimo grupo de cohomología del complejo como el A-módulo cociente

$$H^i(M^\bullet) := \frac{\ker(d^i)}{\operatorname{Im}(d^{i-1})} = \frac{\{m \in M^i \text{ tq } d^i(m) = 0\}}{\{m \in M^i \text{ tq } \exists n \in M^{i-1} \text{ con } m = d^{i-1}(n)\}}$$

Obs (Homología): Si en lugar de considerar módulos y morfismos $d^i : M^i \to M^{i+1}$ crecientes en los índices, consideramos $\{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ una colección de A-módulos junto con morfismos A-lineales $\{\partial_i : M_i \to M_{i-1}\}$ (que llamamos morfismos de borde), entonces:

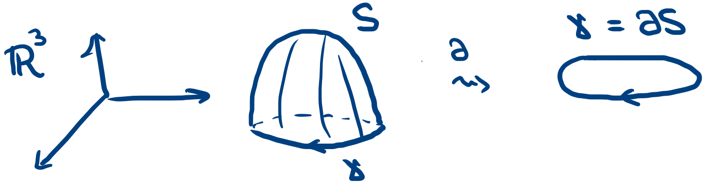
$$M_\bullet = (M_\bullet, \partial_\bullet) : \cdots \xrightarrow{\partial_{i+2}} M_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} M_i \xrightarrow{\partial_i} M_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \cdots$$

es un complejo si $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ (i.e, $\mathrm{Im}(\partial_{i+1}) \subseteq \ker(\partial_i)$) para todo $i\in\mathbb{Z}$. En tal caso, el A-módulo cociente

$$H_i(M_\bullet) := \ker(\partial_i) / \mathrm{Im}(\partial_{i+1})$$

es llamado el i-ésimo grupo de homología del complejo $(M_\bullet, \partial_\bullet)$.

Cultura general: Un caso importante en topología es la llamada "homología singular" (ver también "homología simplicial", "homología persistente" ($\rightsquigarrow$ Análisis de Datos!), etc).



$\leftarrow \quad \partial : H_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{Z}) \to H_1(\mathbb{R}^3, \mathbb{Z})$

Def: Sean $(M^\bullet, d_M^\bullet)$ y $(N^\bullet, d_N^\bullet)$ dos complejos de A-módulos. Un **morfismo de complejos** $\varphi^\bullet : (M^\bullet, d_M^\bullet) \longrightarrow (N^\bullet, d_N^\bullet)$ (ó simplemente $\varphi^\bullet : M^\bullet \to N^\bullet$)

es una colección de morfismos A-lineales $\varphi^\bullet = \{\varphi^i : M^i \longrightarrow N^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ que son **compatibles con los diferenciales**, i.e., $\varphi^{i+1} \circ d_M^i = d_N^i \circ \varphi^i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. En otras palabras,

$$\begin{tikzcd}
M^\bullet \arrow[d, "\varphi^\bullet"'] : & \cdots \arrow[r, "d_M^{i-2}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M^{i-1} \arrow[r, "d_M^{i-1}"] \arrow[d, "\varphi^{i-1}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M^i \arrow[r, "d_M^i"] \arrow[d, "\varphi^i"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M^{i+1} \arrow[r, "d_M^{i+1}"] \arrow[d, "\varphi^{i+1}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \cdots \\
N^\bullet : & \cdots \arrow[r, "d_N^{i-2}"] & N^{i-1} \arrow[r, "d_N^{i-1}"] & N^i \arrow[r, "d_N^i"] & N^{i+1} \arrow[r, "d_N^{i+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo.

$\boxed{\text{Ejercicio importante}}$ Sea $\varphi^\bullet : M^\bullet \to N^\bullet$ un morfismo de complejos de A-módulos. Probar que:

1. $\varphi^\bullet$ induce morfismos $H^i(\varphi^\bullet) : H^i(M^\bullet) \to H^i(N^\bullet)$ entre los respectivos grupos de cohomología para todo $i \in \mathbb{Z}$.
2. Probar que $\ker(\varphi^\bullet) := \{(\ker(\varphi^i), d_M^i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ e $\mathrm{Im}(\varphi^\bullet) := \{(\mathrm{Im}(\varphi^i), d_N^i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ son complejos de A-módulos.

Caso particular importante (Complejo de "de Rham"):

Sea $V = \mathbb{R}^n$ y sea $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Denotamos por $\Lambda^r V^*$ al $\mathbb{R}$-ev de r-formas multilineales alternadas en V, i.e.,

$$\Lambda^r V^* \overset{\text{def}}{:=} \left\{ \begin{array}{l} \omega : V \overset{r \text{ veces}}{\times \cdots \times} V \to \mathbb{R}, \text{ lineal en cada variable y tal que} \\ \omega(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = - \omega(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \quad \forall i \neq j \end{array} \right\}$$

Por ejemplo, si $l_1, \dots, l_r \in V^*$ son formas lineales entonces $l_1 \wedge \dots \wedge l_r \in \Lambda^r V^*$ está def por

$$(l_1 \wedge \dots \wedge l_r)(x_1, \dots, x_r) := \sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon(\sigma)\, l_1(x_{\sigma(1)}) \cdots l_r(x_{\sigma(r)})$$

(Eg. si $l_1(x) = x_1$, $l_2(x) = x_2 \Rightarrow (l_1 \wedge l_2)(x,y) \overset{\text{def}}{=} l_1(x) l_2(y) - l_1(y) l_2(x) = x_1 y_2 - y_1 x_2$).

Hechos (MAT210): si $(e_1, \dots, e_n)$ base de V y $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ base dual de V^* (i.e, $e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$)
Entonces, $\{ e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_r}^* \}_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n}$ es una base de $\Lambda^r V^*$ y luego $\dim_{\mathbb{R}} \Lambda^r V^* = \binom{n}{r}$.

Luego, toda $\omega \in \Lambda^r V^*$ se escribe como $\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n} \omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_r})\, e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_r}^*$

Si fijamos coordenadas $x_1, \dots, x_r$ de V (i.e, $x_i : V \to \mathbb{R}$, $v = (v_1, \dots, v_n) \mapsto v_i$) y denotamos por $dx_1, \dots, dx_n \in V^*$ sus diferenciales (i.e, $dx_j(e_i) = \delta_{ij}$ ← x_i es su propia aprox. lineal!), entonces cada $\omega \in \Lambda^r V^*$ se escribe como

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n} \omega_{j_1, \dots, j_r} \, dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_r} \quad \text{para únicos } \omega_{j_1, \dots, j_r} \in \mathbb{R}$$

Las formas diferenciales buscan generalizar lo anterior al admitir "coeficientes variables":

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n =: V$ abierto (euclideano) no-vacío. Definimos el $\mathbb{R}$-ev de r-formas diferenciales en U por

$$\Omega^r(U) := \{ \omega : U \longrightarrow \Lambda^r V^* \cong \mathbb{R}^{\binom{n}{r}} \text{ de clase } \mathcal{C}^\infty \}$$

Así, $\omega \in \Omega^r(U)$ está dado por $\omega(x) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n} \omega_{j_1, \dots, j_r}(x) \, dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_r}$ donde $\omega_{j_1, \dots, j_r} \in \mathcal{C}^\infty(U; \mathbb{R})$ y $x \in U$.

<u>Obs</u>: Si $A = \Omega^0(U) := \mathcal{C}^\infty(U; \mathbb{R})$, entonces $\Omega^r(U)$ es un A-modulo!

$\rightsquigarrow$ $f \in \mathcal{C}^\infty(U; \mathbb{R})$ y $\omega \in \Omega^r(U)$, $(f\omega)(x) := \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n} f(x) \, \omega_{j_1, \dots, j_r}(x) \, dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_r}$

Def: Sea $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U};\mathbb{R})$. Definimos su diferencial (exterior), denotado $df \in \Omega^1(\mathcal{U})$, por

$$df(x) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, dx_j$$

Más generalmente, si $\omega = \sum \omega_{j_1,\dots,j_r}\, dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_r} \in \Omega^r(\mathcal{U})$ definimos su diferencial exterior por

$$d\omega := \sum d\omega_{j_1,\dots,j_r} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_r} \in \Omega^{r+1}(\mathcal{U}).$$

Con esta notación, decimos que $\omega \in \Omega^r(\mathcal{U})$ es una forma cerrada (resp. forma exacta) si $d\omega = 0$ (resp. $\exists\, \eta \in \Omega^{r-1}(\mathcal{U})$ tal que $\omega = d\eta$).

__Ejemplo__ ($\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$): Si $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$, $(df)(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dy$ en $\Omega^1(\mathcal{U})$.
Si $\omega = P\, dx + Q\, dy \in \Omega^1(\mathcal{U})$ con $P, Q: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ entonces:

$$d\omega \overset{\text{def}}{=} dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy\right) \wedge dy$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ dx \wedge dx = 0 \\ dy \wedge dy = 0}}{=} \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy \underset{\substack{\uparrow \\ dy \wedge dx = -dx \wedge dy}}{=} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy \overset{\text{def}}{=} \mathrm{rot}(F)\, dx \wedge dy \quad \text{con } F = (P, Q)$$

Luego, $\omega = P\, dx + Q\, dy$ es cerrada (resp. exacta) $\Leftrightarrow F = (P, Q)$ irrotacional (resp. gradiente).

$\boxed{\text{Ejercicio}}^*$ Probar que $d^2 = 0$, i.e., toda forma exacta es cerrada (cf. MAT024: "Todo campo gradiente es irrotacional"). } Hay que tener cuidado con los signos!

Consecuencia: Para $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no-vacío,

$$\Omega^\bullet(\mathcal{U}): \quad 0 \to C^\infty(\mathcal{U};\mathbb{R}) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathcal{U}) \xrightarrow{d} \Omega^2(\mathcal{U}) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^{n-1}(\mathcal{U}) \xrightarrow{d} \Omega^n(\mathcal{U}) \xrightarrow{d} 0$$

es un complejo de $\mathbb{R}$-ev, llamado el complejo de de Rham. El $\mathbb{R}$-ev

$$H^r_{dR}(\mathcal{U}) := H^r(\Omega^\bullet(\mathcal{U})) \overset{\text{def}}{=} \frac{\{r\text{-formas cerradas en } \mathcal{U}\}}{\{r\text{-formas exactas en } \mathcal{U}\}}$$

es llamado el r-ésimo grupo de cohomología de de Rham. En part, $H^1_{dR}(\mathcal{U})$ mide cuántos campos irrotacionales l.i. que no son gradientes hay en $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Eg. $H^1_{dR}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \neq 0$ pues $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ no es exacta (MAT024).

Cultura general: Lema de Poincaré (1895): Si $\mathcal{U}$ es simplemente conexo, $H^r_{dR}(\mathcal{U}) = 0 \ \forall r \geq 1$.

de Rham (1931): $H^r_{dR}(\mathcal{U}) \cong H^r(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ sólo depende de la topología de $\mathcal{U}$!

$\rightsquigarrow$ Hodge, Dolbeault, Grothendieck: Generalización al caso complejo ($\approx$ 1941 – 1954).

⚠ La versión más general (diferenciable) del Teorema de Stokes (cf. MAT290) afirma que si $M \subseteq \mathbb{R}^n$ es una variedad de $\dim_{\mathbb{R}}(M) = r$ (i.e, M luce localmente como $\mathbb{R}^r$), compacta y orientable (cf. MAT024), entonces para toda $\omega \in \Omega^{r-1}(\mathbb{R}^n)$ se cumple

$$\boxed{\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega}$$

donde ∂M es el borde (orientado) de M.

Eg $(n=r=1)$: $\overset{M}{[a,b]} \subseteq \mathbb{R} \rightsquigarrow \partial M = \{b\} - \{a\}$. Sea $\omega = f(x) \in \Omega^0(\mathbb{R})$ función C^∞
$\Rightarrow d\omega = f'(x)\,dx$. Stokes: $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \Leftrightarrow \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$!

Ejercicio Usar el Teorema de Stokes con $n=2$ (resp. $n=3$) para deducir el Teorema de Green (resp. Teorema de Gauss) de MAT024.
[Indicación: Probar que si $\omega = P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ y si $F = (P, Q, R)$ campo vectorial, entonces $d\omega = \operatorname{div}(F)\,dx\wedge dy\wedge dz$.]