Clase 17: Topología de Zariski y Funciones regulares, Geometría de Ideales

§30 Topología de Zariski y funciones regulares (continuación):

Sean $S \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ y $X \subseteq \mathbb{A}^n$ subconjuntos arbitrarios. Recordemos que:

$V(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{ a \in \mathbb{A}^n \text{ tal que } f(a) = 0 \ \forall f \in S \} \subseteq \mathbb{A}^n$ conjunto algebraico afín.

$\mathcal{I}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{ f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \text{ tal que } f(a) = 0 \ \forall a \in X \} \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ ideal de X.

Hilbert Nullstellensatz:

① Débil: Todo $\mathfrak{m} \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ ideal maximal es de la forma $\mathfrak{m}_a = \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle$ para cierto $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$.

$\rightsquigarrow$ Consecuencia: $V(S) = \emptyset \Leftrightarrow \langle S \rangle = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$.

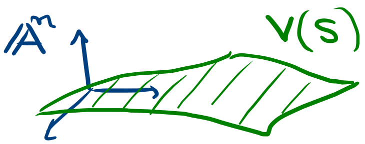
② Fuerte: Para todo $I \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ ideal, se tiene $\mathcal{I}(V(I)) = \sqrt{I}$

¿Qué podemos decir de $V(\mathcal{I}(X))$?

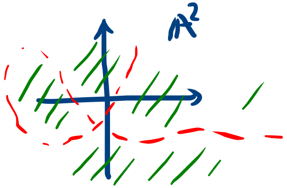
Necesitaremos la siguiente topología, introducida por Oscar Zariski

Def (Zariski, 1952): La topología de Zariski en $\mathbb{A}^n$ es la topología cuyos conjuntos cerrados son los conjuntos algebraicos afines $V(S)$, con $S \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Así, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{A}^n$ es un abierto Zariski si $\exists S$ tal que $\mathcal{U} = \mathbb{A}^n - V(S)$.

Concretamente, los cerrados son ceros comunes de (finitos) polinomios y los abiertos sus complementos:



$\mathcal{U} = \mathbb{A}^n - V(S)$.

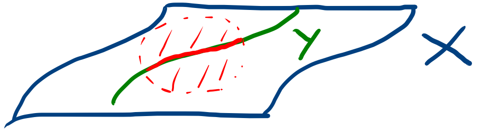


Notación: Dado $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, definimos el abierto principal asociado a f por:

$$\mathcal{U}_f := \mathbb{A}^n - V(f) = \{ a \in \mathbb{A}^n \text{ tal que } f(a) \neq 0 \}$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}^*$ Probar que los abiertos principales $\mathcal{B} = \{\mathcal{U}_f\}_{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}$ es una base de la topología de Zariski. [Indicación: $V(S) = \bigcap_{f \in S} V(f)$ por definición]

Def: Sea (X, τ) esp. topológico y sea $Y \subseteq X$ un subconjunto. La topología inducida (o topología traza) en Y es la topología obtenida al declarar que los cerrados (resp. abiertos) de Y son la intersección de cerrados (resp. abiertos) de X con Y.

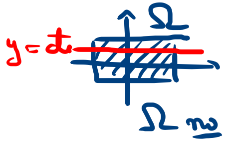


(eg. $\mathcal{U} = [0, \frac{1}{2}[$ es abierto en $Y = [0,1] \subseteq X = \mathbb{R}$)

Def: Una variedad algebraica afín es un conjunto algebraico $X = V(S) \subseteq \mathbb{A}^n$ dotado de la topología de Zariski (inducida por $\mathbb{A}^n$).

Un abierto típico es $X \cap \mathcal{U}_f$, $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$

Ejemplos:



① En $\mathbb{A}^1$, los cerrados de Zariski son $\emptyset = V(1)$, $\mathbb{A}^1 = V(0)$ y los conjuntos finitos $\{a_1, \dots, a_r\} = V(f)$ con $f = (x - a_1) \cdots (x - a_r) \in \mathbb{C}[x]$ (TFA!)

② En $\mathbb{A}^2$, los cerrados de Zariski son $\emptyset$, $\mathbb{A}^2$, conjuntos finitos y curvas algebraicas $C = V(f) = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tq } f(x,y) = 0\}$ con $f \in \mathbb{C}[x,y]$ no-cte.

③ Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ subconjunto arbitrario (i.e., no necesariamente algebraico).
La adherencia (de Zariski) de X, denotada $\overline{X}^{Zar} \subseteq \mathbb{A}^n$, es el cerrado (Zariski) más pequeño que contiene a X. Concretamente,

$$\overline{X}^{Zar} = V(\mathcal{I}(X)) \leftarrow$$

En part, si $X \subseteq \mathbb{A}^n$ var alg. afín $\Rightarrow V(\mathcal{I}(X)) = X$ ✓

④ Si $X \subseteq \mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$ es un conjunto infinito $\Rightarrow \overline{X}^{Zar} = \mathbb{A}^1$. Por ejemplo, $X_0 := \{z \in \mathbb{C}$ tal que $\sin(z) = 0\} \rightsquigarrow \overline{X_0}^{Zar} = \mathbb{A}^1$ (pero X_0 es cerrado euclideano!)

Como en cualquier contexto razonable, necesitamos definir la noción de "morfismo":

Def: Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algebraicas afines. Un morfismo regular $\varphi: X \to Y$ es la restricción de una función polinomial

$$\Phi: \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m, \; x = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \text{ con } f_i \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$$

tal que $\Phi(X) \subseteq Y$. Decimos que $\varphi: X \xrightarrow{\sim} Y$ es un isomorfismo (birregular) si φ es biyectiva y si tanto φ como φ^{-1} son morfismos regulares.

Ejemplos:

1. Toda función polinomial $\varphi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$, $x \mapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$ es regular.

2. Todo morfismo regular $\varphi : X \to Y$ es continuo (para la topología de Zariski).

En efecto, basta considerar abiertos principales

$$\mathcal{U}_f \cap Y = \{ y \in Y \text{ tal que } f(y) \neq 0 \} \quad \text{con } f \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_m]$$

$$\Rightarrow \varphi^{-1}(\mathcal{U}_f \cap Y) \overset{\text{def}}{=} \{ x \in X \text{ tal que } f(\varphi(x)) \neq 0 \} = \mathcal{U}_{f \circ \Phi} \cap X \quad \text{abierto Zariski } \checkmark$$

3. $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Dar un ejemplo de $\varphi : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ continua que no sea regular

[Indicación: φ continua si $\varphi^{-1}(F)$ es finito $\forall F \subseteq \mathbb{C}$ finito].

Caso particular (muy) importante: Una función regular en $X \subseteq \mathbb{A}^n$ es un morfismo regular $f : X \to \mathbb{C}$, donde $\mathbb{C} = \mathbb{A}^1$ con la topología de Zariski. Denotamos por

$$\mathcal{O}(X) := \{ f : X \to \mathbb{C} \text{ función regular} \} \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Im}(f \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] \overset{\text{res}}{\longmapsto} f|_X)$$

al $\mathbb{C}$-álgebra de funciones regulares en X. ← Tiene sentido fg, $f+g$, λf con $\lambda \in \mathbb{C}$

Obs importante: Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algebraicas afines.

Entonces, todo morfismo regular $\varphi : X \to Y$ induce un morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras

$$\begin{aligned} \varphi^* : \mathcal{O}(Y) &\longrightarrow \mathcal{O}(X) \\ f &\longmapsto \varphi^*(f) := f \circ \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi^*(f)"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

llamado el pullback de φ. Dado que "revierte el orden" decimos que es contravariante.

Teorema: Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algebraicas afines. Existe una correspondencia

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Morfismos regulares} \\ \varphi : X \to Y \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Morfismos de } \mathbb{C}\text{-álgebras} \\ \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X) \end{array} \right\}, \quad \varphi \mapsto \varphi^*$$

En particular, $X \cong Y$ si y sólo si $\mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(Y)$ como $\mathbb{C}$-álgebras.

Dem: Inyectividad: Si $(y_1, \dots, y_m)$ son coord. en $\mathbb{A}^m$ (ie, $y_i : \mathbb{A}^m \to \mathbb{C}$ i-ésima coord) y sea $\varphi = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)) \Rightarrow \varphi^*(y_i) \overset{\text{def}}{=} y_i \circ \varphi \overset{\text{def}}{=} \varphi_i \rightsquigarrow \varphi^*$ determina φ ✓

Sobreyectividad: Sea $\psi : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras, $y_i \in \mathcal{O}(Y) \overset{\psi}{\longmapsto} \overset{=:\varphi_i}{\psi(y_i)} \in \mathcal{O}(X)$

$\rightsquigarrow \varphi : X \to \mathbb{A}^m$, $x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$ con $\varphi_i := \psi(y_i)$. Veamos que $\varphi(X) \subseteq Y$:

Sea $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^m)$ tq $f = 0$ en Y (ie, $f \in \mathcal{I}(Y)$), entonces:

$$f(\varphi(x)) \overset{\text{def}}{=} f(\psi(y_1)(x), \dots, \psi(y_m)(x)) \underset{\text{de } \mathbb{C}\text{-alg}}{\overset{\psi \text{ morfismo}}{=}} \psi(f(y_1, \dots, y_m))(x) = 0 \text{ pues } f = 0 \text{ en } Y$$

$\Rightarrow f(\varphi(x)) = 0 \ \forall f \in \mathcal{I}(Y)$, ie, $\varphi(x) \in V(\mathcal{I}(Y)) = Y$ y se cumple $\varphi^* = \psi$ ∎

⚠ Consecuencia: Basta comprender $\mathbb{C}$-álgebras para entender las variedades alg. afines!

¿Qué anillos aparecen como álgebras de funciones regulares?

$\ker(\mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(X)) = \mathcal{I}(X)$

Por un lado, si $X \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad alg. afín $\Rightarrow \mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/\mathcal{I}(X)$.

En part: i) $\mathcal{O}(X)$ es un $\mathbb{C}$-álgebra fin. generada (por $[x_1], \ldots, [x_n]$)

ii) $\mathcal{O}(X)$ es un anillo reducido (pues $f^n = 0$ con $n \geqslant 1 \Rightarrow f = 0$, $\forall f \in \mathcal{O}(X)$).

Recíprocamente: Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra fin. generada y reducida. Entonces:

i) $A = \langle b_1, \ldots, b_m \rangle_{\mathbb{C}\text{-alg}}$ entonces $\varphi : \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m] \twoheadrightarrow A$, $x_i \mapsto b_i$ sobreyectivo

$\rightsquigarrow$ Noether: $A \cong \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]/I$ con $I := \ker(\varphi)$.

ii) A reducida $\Longleftrightarrow I = \sqrt{I}$ ideal radical!

En part, si definimos $X := V(I) \subseteq \mathbb{A}^m \Rightarrow \mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(V(I)) = I$ (Nullstellensatz)

y luego $\mathcal{O}(X) \cong A$. En conclusión, hay una correspondencia:

$$\left\{ \begin{array}{c} X \subseteq \mathbb{A}^n \text{ var.} \\ \text{algebraica afín} \end{array} \right\} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \\ \text{ideal radical} \end{array} \right\}$$

$$X \longmapsto \mathcal{I}(X)$$

$$V(I) \longleftarrow I$$