# Clase 12: Ortogonalidad de caracteres y Funciones Centrales

Recuerdo: $\varphi, \psi : G \to \mathbb{C}$ $\quad \langle \varphi, \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g^{-1}) \psi(g)$ y $(\varphi | \psi) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \overline{\psi(g)} = \langle \varphi, \psi^* \rangle$

$\psi^*(g) := \overline{\psi(g^{-1})}$ ADJUNTO

## §23. Ortogonalidad de caracteres

Con la notación anterior, el caso particular que más nos interesa es:

$\chi_V : G \to \mathbb{C}$ carácter, donde $\chi_V(g^{-1}) \overset{\text{Prop}}{=} \overline{\chi_V(g)} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \chi_V^* = \chi_V$ AUTOADJUNTO

$\Rightarrow (\varphi | \chi_V) = \langle \varphi, \chi_V \rangle$ para toda función $\varphi : G \to \mathbb{C}$.

**Teorema 3.7.4 (Teorema de Frobenius).** — *Sean $\rho_V : G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\rho_W : G \to \mathrm{GL}(W)$ dos representaciones irreducibles de un grupo $G$. Entonces:*

1. *Si $\rho_V$ y $\rho_W$ no son isomorfas, entonces $\langle \chi_V, \chi_W \rangle = 0$.*
2. *Si $\rho_V \cong \rho_W$, entonces $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$.*

$R_{W,g} = (a_{i_2 j_2}(g))$

Dem: Si $\rho_{V,g} \leftrightarrow R_{V,g} = (a_{i_1 j_1}(g)) \Rightarrow \chi_V(g) = \sum a_{i_1 i_1}(g)$. Similar: $\chi_W(g) = \sum a_{i_2 i_2}(g)$

Vimos que (Clase 11):

① Si $\rho_V \not\cong \rho_W \Rightarrow 0 = \sum_{i_1, i_2} \langle a_{i_1 i_1}, a_{i_2 i_2} \rangle \overset{\text{def}}{=} \langle \chi_V, \chi_W \rangle$ ✓

② Si $\rho_V = \rho_W \Rightarrow \langle \chi_V, \chi_V \rangle = \sum_{i_1, j_1} \langle a_{i_1 i_1}, a_{j_1 j_1} \rangle = \sum_{i_1, j_1} \frac{1}{\dim_{\mathbb{C}}(V)} \delta_{i_1 j_1} = \frac{\dim_{\mathbb{C}}(V)}{\dim_{\mathbb{C}}(V)} = 1$ ■

Veamos algunas consecuencias importantes del Teorema de Frobenius:

**Teorema 3.7.5.** — *Sea $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación de un grupo finito $G$ y sea*

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$$

*una descomposición en representaciones irreducibles. Sea $W$ una representación* irreducible *arbitraria. Entonces, el número de representaciones $W_i$ tales que $W_i \cong W$ está dado por $\langle \chi_V, \chi_W \rangle$. En particular, dicho número es independiente de la descomposición dada.*

Dem: Tenemos que $\chi_V = \chi_{W_1} + \cdots + \chi_{W_k} \Rightarrow \langle \chi_V, \chi_W \rangle = \sum_{j=1}^{k} \langle \chi_{W_j}, \chi_W \rangle$

Pero: $\langle \chi_{W_j}, \chi_W \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho_{W_j} \cong \rho_W \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$ (Frobenius!) ■

**Corolario 3.7.6.** — *Sean $\rho_V : G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\rho_W : G \to \mathrm{GL}(W)$ dos representaciones de un grupo $G$. Entonces $\rho_V \cong \rho_W$ si y sólo si $\chi_V = \chi_W$.* Muy útil!

Dem: Si $\chi_V = \chi_W \overset{\text{Teorema}}{\Longrightarrow}$ $\rho_V$ y $\rho_W$ contienen exactamente el mismo nº de veces toda representación irreducible dada! ■

⚠ Consecuencia importante: Sea $G$ un grupo finito.

Ejercicio de clase anterior

Por un lado, toda representación irreducible $\rho_V : G \to GL(V)$ cumple $\underbrace{\dim_{\mathbb{C}}(V) \leq |G|}$

Por otro lado, vimos que $\rho_V$ está completamente determinada por $\chi_V : G \to \mathbb{C}$, donde cada $\chi_V(g) = \sum \lambda_j$ es suma (de $\dim_{\mathbb{C}}(V) \leq |G|$) raíces de la unidad cuyo orden divide $|G|$ (Teorema de Lagrange). $(\Rightarrow \lambda_j^{|G|} = 1)$

$\Rightarrow$ Hay sólo un número finito $h = h(G) \in \mathbb{N}$ de representaciones irreducibles $W_1, W_2, \ldots, W_h$ de $G$, determinadas por sus caracteres $\chi_1, \ldots, \chi_h$ "irreducibles"

**Conclusión:** Basta conocer $\chi_1, \ldots, \chi_h$ para entender toda representación de $G$ !

Si $\rho_V : G \to GL(V)$ repr. arbitraria $\Rightarrow V \cong W_1^{\oplus m_1} \oplus \ldots \oplus W_k^{\oplus m_k}$ ciertos $m_i \in \mathbb{N}$

Además, $\chi_V = m_1 \chi_1 + \ldots + m_h \chi_h$ y $m_i = \langle \chi_V, \chi_i \rangle$ (por ortogonalidad)

$$\overset{\text{"Pitágoras"}}{\Longrightarrow} \langle \chi_V, \chi_V \rangle = m_1^2 + \ldots + m_h^2 \qquad (\star)$$

**Teorema 3.7.8.** — *Sea $\rho_V : G \to \mathrm{GL}(V)$ representación de un grupo $G$. Entonces $V$ es irreducible si y sólo si $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$.*

Muy útil!

Dem: $\rho_V$ irreducible $\iff \rho_V \cong \rho_{W_j}$ para cierto $j \in \{1, \ldots, h\}$

$\iff m_j = 1$ y $m_i = 0$ si $i \neq j \overset{(*)}{\iff} \langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$ ■

Recuerdo (Clase anterior): Si $\rho_R = \rho_{reg} : G \to GL_{|G|}(\mathbb{C})$ representación regular (dada por $\rho_{R,g}(e_h) := e_{gh}$) $\Rightarrow \chi_R(g) = 0$ si $g \neq e$ y $\chi_R(e) = |G|$. $\}(*)$

**Corolario 3.7.10.** — *Sean $W_1, \ldots, W_h$ las representaciones irreducibles de un grupo finito $G$, y sea $n_i := \dim_{\mathbb{C}}(W_i)$. Entonces, cada $W_i$ está contenida $n_i$ veces en la representación regular de $G$. En particular,*

1. $|G| = n_1^2 + \ldots + n_h^2$.
2. *Si $g \neq 1$ entonces $\sum_{i=1}^h n_i \chi_i(g) = 0$.*

Dem: $W_i$ está contenida $\langle \chi_R, \chi_i \rangle$ veces en la repr. regular. Calculamos:

$$\langle \chi_R, \chi_i \rangle \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_R(g^{-1}) \chi_i(g) \overset{(*)}{=} \frac{1}{|G|} \chi_R(e) \chi_i(e) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\cancel{|G|}} \cancel{|G|} n_i = n_i$$

$\Rightarrow \mathbb{C}^{|G|} \cong W_1^{\oplus n_1} \oplus \cdots \oplus W_h^{\oplus n_h} \Rightarrow \chi_R(g) = n_1 \chi_1(g) + \ldots + n_h \chi_h(g) \quad \forall g \in G$.

① $g = e$: $|G| = n_1^2 + \ldots + n_h^2$ y ② $g \neq e$: $0 = n_1 \chi_1(g) + \ldots + n_h \chi_h(g)$ ■

Consecuencias prácticas: Sean $W_1, \ldots, W_h$ las repr. irreducibles de $G$, con $n_i = \dim_{\mathbb{C}}(W_i)$ y con caracteres $\chi_1, \ldots, \chi_h : G \to \mathbb{C}$. Entonces:

1. El grado de cualquier repr. irreducible es $\leq \sqrt{|G|}$.

2. Si construimos repr. irreducibles no isomorfas (ie, "ortogonales") $V_1, \ldots, V_m$ de grados $n_1, \ldots, n_m$ tales que $n_1^2 + \ldots + n_m^2 = |G|$, entonces son todas las representaciones irreducibles de $G$!

3. Si conocemos $W_1, \ldots, W_{h-1}$ entonces podemos determinar $\chi_h$:
   a) $n_1^2 + \ldots + n_{h-1}^2 + n_h^2 = |G| \rightsquigarrow n_h = \dim_{\mathbb{C}}(W_h) = \chi_h(e)$ ✓
   b) Si $g \neq e$, $0 = n_1 \chi_1(g) + \ldots + n_{h-1}\chi_{h-1}(g) + n_h \chi_h(g) \rightsquigarrow \chi_h(g)$ ✓

Pregunta: ¿Cómo determinar el nº de representaciones irreducibles no-isomorfas de $G$? (ie, ¿Cómo calcular $h = h(G)$?)

# §24. Caracteres y Funciones centrales

**Recuerdo:** $f : G \to \mathbb{C}$ es CENTRAL si $f(hgh^{-1}) = f(g)$ $\forall g \in G$ y $\forall h \in G$.

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{C}(G) := \{ f : G \to \mathbb{C} \text{ central} \}$ $\mathbb{C}$-ev de dim $= \# \{\text{clases de conj. de } G\}$.

**Prop:** Sea $f : G \to \mathbb{C}$ central y $\rho : G \to GL(V)$ repr ($g \mapsto \rho_g$). Definamos $\rho_f : V \to V$ por

$$\rho_f := \sum_{g \in G} f(g) \rho_g$$

Si $V$ irreducible, entonces $\rho_f = \lambda \, \mathrm{Id}_V$ con $\lambda = \frac{|G|}{\dim_{\mathbb{C}}(V)} \langle f, \overline{\chi_V} \rangle$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho_f"] \arrow[d, "\rho_g"', "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & V \arrow[d, "\rho_g", "\wr"'] \\ V \arrow[r, "\rho_f"] & V \end{tikzcd}$$

**Dem:** Veamos que $\rho_f$ es un morfismo de repr (i.e., $\rho_f \circ \rho_g = \rho_g \circ \rho_f$ $\forall g \in G$):

$$\rho_h^{-1} \rho_f \rho_h \overset{\text{def}}{=} \sum_{g \in G} f(g) \underbrace{\rho_h^{-1} \rho_g \rho_h}_{\rho_{h^{-1}gh}} \underset{k = h^{-1}gh}{=} \sum_{k \in G} \underbrace{f(hkh^{-1})}_{f(k) \text{ pues } f \text{ central}} \rho_k = \rho_f \quad \forall h \in G \ \checkmark$$

Lema de Schur $\overset{V \text{ irred}}{\Longrightarrow}$ $\rho_f = \lambda \, \mathrm{Id}_V$ y calculamos:

$$\boxed{\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}}$$

$$\mathrm{tr}(\lambda \, \mathrm{Id}_V) = \lambda \dim_{\mathbb{C}}(V) = \mathrm{tr}(\rho_f) \overset{\text{def}}{=} \sum_{g \in G} f(g) \underbrace{\mathrm{tr}(\rho_g)}_{\chi_V(g)} = |G| \cdot \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \overline{\chi_V(g^{-1})} \overset{\text{def}}{=} |G| \langle f, \overline{\chi_V} \rangle \quad \blacksquare$$

*Teorema 3.8.3. — Los caracteres $\chi_1, \ldots, \chi_h$ de las representaciones irreducibles del grupo $G$ forman una base ortonormal de $\mathscr{C}(G)$.*

<u>Dem</u>: Sabemos que los $\chi_1, \ldots, \chi_h$ son ortonormales (Frobenius)

MAT210: $\{\chi_1, \ldots, \chi_h\}$ es una base $\iff$ "$\forall f \in \mathscr{C}(G)$, $\langle f, \chi_i \rangle = 0 \ \forall i \Rightarrow f = 0$"

$\underset{f \mapsto \bar{f}}{\iff}$ "$\forall f \in \mathscr{C}(G)$, $\langle f, \overline{\chi_i} \rangle = 0 \ \forall i \Rightarrow f = 0$"

Sea $f \in \mathscr{C}(G)$ tq $\langle f, \overline{\chi_i} \rangle = 0 \ \forall i$ ★:

Prop anterior $\Rightarrow$ si $\rho : G \to GL(V)$ <u>irred</u>, entonces $\rho_f = 0$

En gral, si $\rho$ <u>no</u> fuese irred, consideramos la descomp. en repr. irred $\Rightarrow \rho_f = 0$ ✓

$\overset{(★)}{\leadsto}$ $\rho_f = 0$ para <u>toda</u> representación $\rho : G \longrightarrow GL(V)$.

Consideramos en particular $\rho = \rho_{reg} : G \longrightarrow GL_{|G|}(\mathbb{C})$ la representación regular y calculamos:

$$0 = \underbrace{\rho_f(e_1)}_{\text{identidad de } G} \overset{\text{dy}}{=} \sum_{g \in G} f(g) \overbrace{\rho_g(e_1)}^{e_g \text{ por dy!}} \underset{\{e_g\}_{g \in G} \text{ base}}{\Longrightarrow} f(g) = 0 \ \forall g \in G, \text{ ie, } f = 0 \qquad \blacksquare$$

<u>Corolario</u>: $h \overset{\text{dy}}{=} \#\{\text{repr. irreducibles de } G \text{ módulo isomorfismo}\}$

$\underset{\text{Teorema}}{=} \dim_{\mathbb{C}} \mathscr{C}(G) = \#\{\text{clases de conjugación de } G\}$

Respuesta a la Pregunta anterior!

**Algunas consecuencias**: Sea $C_g := \{hgh^{-1},\ h \in G\}$ y $c(g) = \# C_g$.

Ya vimos el caso $g = e$ →

**Prop**: Sean $\chi_1, \dots, \chi_h$ los caracteres de las repr. irreducibles de $G$. Entonces $\forall g \in G$:

1. $\sum_{i=1}^{h} |\chi(g)|^2 = |G| / c(g)$
2. Si $h$ no es conjugado a $g$ (i.e., $h \notin C_g$), entonces $\sum_{i=1}^{h} \overline{\chi_i(g)}\, \chi_i(h) = 0$.

**Dem**: Dado $g \in G$ sea $f_g(h) := \mathbb{1}_{C_g}(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h \in C_g \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$ función central !

$\Rightarrow f_g = \lambda_1 \chi_1 + \dots + \lambda_h \chi_h$ ciertos $\lambda_i \in \mathbb{C}$ $\overset{\text{"Fourier"}}{\rightsquigarrow}$ $\lambda_i = \langle f_g, \chi_i \rangle \overset{\text{def}}{=} \dfrac{c(g)}{|G|} \overline{\chi_i(g)}$ ↑ Ejercicio

$\Rightarrow f_g(h) = \dfrac{c(g)}{|G|} \sum_{i=1}^{h} \overline{\chi_i(g)}\, \chi_i(h)$ ↗ Reemplazar $\rightsquigarrow$ $h = g \Rightarrow$ 1 ✓

$h \notin C_g \Rightarrow$ 2 ✓ $\blacksquare$

**Teorema**: $G$ abeliano $\Leftrightarrow$ Toda representación irreducible es de grado 1.

**Dem**: $G$ abeliano $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $hg = gh\ \forall g, h \in G \Leftrightarrow \forall g \in G,\ hgh^{-1} = g\ \forall h \in G$

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} c(g) = 1\ \forall g \in G \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} |G| = \#$ Clase de conj. de $G$

$\overset{\text{Teorema}}{\Leftrightarrow} |G| = \#$ Repr. irred. de $G \overset{\text{def}}{=} h$

$n_i = \dim_{\mathbb{C}}(W_i)$ con $W_i$ repr. irred →

$\Leftrightarrow |G| = n_1^2 + \dots + n_h^2 = h \Leftrightarrow n_i = 1\ \forall i = 1, \dots, h$ $\blacksquare$

**Corolario 3.8.7.** — *Sea $A \leq G$ sub-grupo abeliano. Entonces toda representación irreducible de $G$ es de grado a lo más $[G : A] = \frac{|G|}{|A|}$.*

Muy útil !

**Dem:** Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación irreducible y consideremos

$\rho_A := \rho|_A : A \to GL(V)$ (restricción). Si $W \subseteq V$ sub repr. irred de $\rho_A$

no nec. irred $\quad \xRightarrow{\text{Teo. anterior}} \quad \dim_{\mathbb{C}}(W) = 1$, ie, $W = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(w)$

Por otro lado, si consideramos $\mathcal{U} := \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\langle \{\rho_g(w)\}_{g \in G} \rangle$ $G$-invariante $\neq \{0\}$

$\xRightarrow{V \text{ irred}} \quad \mathcal{U} = V$.

Finalmente, notamos que si $g \in G$ y $h \in A$ entonces la imagen de $w \in W$ cumple:

$$\rho_{gh}(w) = \rho_g(\rho_h(w)) = \rho_g(\lambda w) = \lambda \rho_g(w), \quad \text{cierto } \lambda = \lambda_h \in \mathbb{C}^*$$

ie, $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\langle \rho_{gh}(w) \rangle = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\langle \rho_g(w) \rangle$ sólo depende de la clase lateral $gA$

$\Rightarrow$ Hay a lo más $[G : A]$ espacios $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\langle \rho_g(w) \rangle$ diferentes

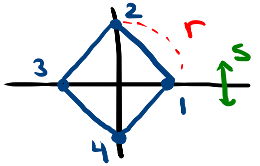
$\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}}(V) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{U}) \leq [G : A]$ $\blacksquare$

**Ejemplo:** $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong K = \{\text{dobles transp}\} \leq A_4 \Rightarrow$ las repr. irreducibles de $A_4$ son de grado $\leq \frac{12}{4} = 3$.

# §25. Tablas de caracteres

La **TABLA DE CARACTERES** de un grupo finito $G$ es una matriz con filas dadas por los caracteres irreducibles y columnas dadas por las clases de conjugación:

**Ejemplo:** El grupo $D_4 \leq O_2(\mathbb{R})$ puede ser visto en $S_4$




$$D_4 = \{Id, r, r^2, r^3, s, rs, r^2s, r^3s\} \hookrightarrow \{Id; (2,3,4,1); (3,4,1,2); (4,1,2,3); (2,4); (1,2)(3,4); (1,3); (1,4)(2,3)\} \leq S_4$$

$\rho_{det}$

$\rho_{signo} := \varepsilon$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{Z(D_4)}$ (primeras dos columnas)

| | $\{Id\}$ | $\{r^2\}$ | $\{r, r^3\}$ | $\{s, r^2s\}$ | $\{rs, r^3s\}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_{trivial}$ | $1$ | $1$ | $1$ | $1$ | $1$ |
| $\chi_{det}$ | $1$ | $1$ | $1$ | $-1$ | $-1$ |
| $\chi_{signo}$ | $1$ | $1$ | $-1$ | $-1$ | $1$ |
| $\chi_{det \otimes signo}$ | $1$ | $1$ | $-1$ | $1$ | $-1$ |
| $\chi_5$ | $2$ | $-2$ | $0$ | $0$ | $0$ |

¿La última?

$$|D_4| = 8 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + n^2 \Rightarrow n = 2$$

y $\chi_1(g) + \chi_2(g) + \chi_3(g) + \chi_4(g) + 2\chi(g) = 0$ $\forall g \neq Id \rightsquigarrow \chi(g)$ ✓

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Construir $\rho_5 : D_4 \to GL_2(\mathbb{C})$