Clase 11: Caracteres y Lema de Schur.

§21. Caracteres

Recuerdo (MAT210): Si $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{C})$, definimos la **TRAZA** de A como $\mathrm{tr}(A) := a_{11}+\ldots+a_{nn}$. Más aún, si $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{C}$ son los valores propios de A, entonces $\mathrm{tr}(A)=\lambda_1+\ldots+\lambda_n$. Además, $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(PAP^{-1})$ $\forall P\in GL_n(\mathbb{C})$.

***Definición 3.5.2* (carácter).** — Sea $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación de un grupo G. El **carácter** de $\rho = \rho_V$ es la función χ_V (o χ_ρ) dada por

$$\begin{aligned}\chi_V : G &\longrightarrow \mathbb{C}\\ g &\longmapsto \mathrm{tr}(\rho_g).\end{aligned}$$

Obs: A pesar de que el caracter χ_ρ de ρ contiene menos información sobre la representación, veremos que codifica varias propiedades interesantes de ρ y de G!

Proposición 3.5.3. — *Sea $\chi : G \to \mathbb{C}$ el carácter de una representación $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ de grado n. Entonces:*

1. $\chi(e) = n$.
2. $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ *para todo* $g \in G$.
3. $\chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$ *para todos* $g, h \in G$. *En particular,* $\chi(g_1 g_2) = \chi(g_2 g_1)$ *para todos* $g_1, g_2 \in G$.

Dem: ① $\chi(e) = \mathrm{tr}(\rho_e) = \mathrm{tr}(\mathrm{Id}_V) = \dim_{\mathbb{C}}(V)$ ✓ ③ $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ ✓

② G finito $\Rightarrow$ ρ_g orden finito $\Rightarrow$ valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son de orden finito

$(\rho_g^n = \mathrm{Id}_V \Rightarrow \rho_g^n v_j = \lambda_j^n v_j = v_j \Rightarrow \lambda_j^n = 1 \quad \forall j)$

Obs: $\lambda = e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\overline{\lambda} = e^{-i\theta} = 1/\lambda$

$\Rightarrow \overline{\chi(g)} = \overline{\mathrm{tr}(\rho_g)} = \sum \overline{\lambda_j} = \sum 1/\lambda_j = \mathrm{tr}(\rho_g^{-1}) = \mathrm{tr}(\rho_{g^{-1}}) = \chi(g^{-1})$ ∎

Definición 3.5.4 (función central). — Una función $f : G \to \mathbb{C}$ es llamada una **función central** si es constante en cada clase de conjugación de G, es decir, si $f(hgh^{-1}) = f(g)$ para todos $g, h \in G$. Si C es una clase de conjugación de G, denotamos por $f(C)$ el valor de f en C. El $\mathbb{C}$-espacio vectorial

$$\mathscr{C}(G) := \{f : G \to \mathbb{C} \text{ función central}\}$$

tiene dimensión $\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{C}(G) = \mathrm{card}(\{\text{clases de conjugación de } G\})$.

Más adelante: Los caracteres forman una base de $\mathscr{C}(G)$!

Ejemplos:

$G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{C}^{|G|} = \mathbb{C}^2$ con base $e_1 = e_{[0]}$ y $e_2 = e_{[1]}$ $\rightsquigarrow$ $\rho_{reg,[0]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\rho_{reg,[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(1) El carácter de la representación regular $\rho_{reg} : G \longrightarrow GL_{|G|}(\mathbb{C})$ (dada por $\rho_{reg,g}(e_h) := e_{gh}\ \forall g, h \in G$) es

$$\chi_{reg}(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } g = e \\ 0 & \text{si } g \neq e \end{cases}$$

Si $A \subseteq X$ subconj

$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$

Indicatriz

$C_g = c(g)$
$:= \{hgh^{-1}, h \in G\}$

ie, $\chi_{reg} = |G|\, \mathbb{1}_{C_e}$, $C_e = \{e\}$ es la clase de conjugación de la identidad.

(2) Sea $\rho_{perm} : S_3 \longrightarrow GL_3(\mathbb{C})$ la representación de permutación
$\sigma \longmapsto P_\sigma$

Recordar que S_3 posee 3 clases de conjugación:

$1+1+1 \longleftrightarrow e := \{Id\} \longleftrightarrow 3$ elem. fijos $\longleftrightarrow \chi_{perm}(e) = 3$

$1+2 \longleftrightarrow t := \{3$ transposiciones$\} \longleftrightarrow 1$ elem. fijos $\longleftrightarrow \chi_{perm}(t) = 1$

$3 \longleftrightarrow c := \{2$ 3-ciclos$\} \longleftrightarrow 0$ elem. fijos $\longleftrightarrow \chi_{perm}(c) = 0$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Calcular χ_{perm} de S_4 y S_5.

Ejemplo importante (representación dual):

Sea $\rho = \rho_V : G \to GL(V)$ una representación, y sea $V^* = \{ \varphi : V \to \mathbb{C} \text{ lineal} \}$ espacio dual.

Definimos la REPRESENTACIÓN DUAL

$$\rho^* = \rho_{V^*} : G \longrightarrow GL(V^*), \quad g \longmapsto \rho^*_g$$

mediante la relación "producto dualidad"

$$\varphi(v) =: \langle \varphi, v \rangle = \langle \rho^*_g(\varphi), \rho_g(v) \rangle \quad \forall g \in G \text{ y } \forall v \in V, \forall \varphi \in V^*$$

i.e., $\varphi(v) \overset{\text{def}}{=} \rho^*_g(\varphi)(\rho_g(v)) \overset{w := \rho_g(v)}{\iff} \rho^*_g(\varphi)(w) := \varphi(\rho_g^{-1}(w)) \overset{\text{def}}{=} ({}^t\rho_g^{-1}(\varphi))(w)$

$\Rightarrow \boxed{\rho^*_g = {}^t\rho_g^{-1}}$ **Matricialmente**: $R^*_g = {}^tR_g^{-1}$ en $GL_n(\mathbb{C})$.

En particular, $\chi_{V^*}(g) \overset{\text{def}}{=} \chi_{\rho^*}(g) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{tr}({}^t\rho_g^{-1}) = \mathrm{tr}(\rho_g^{-1}) \overset{\text{def}}{=} \chi_V(g^{-1}) \overset{\text{Prop}}{=} \overline{\chi_V(g)}$

$\Rightarrow \boxed{\chi_{V^*}(g) = \overline{\chi_V(g)} \quad \forall g \in G}$

Ejercicio útil Probar que ρ_V irreducible $\iff$ ρ_{V^*} irreducible. Dar un ejemplo donde $\rho_V \cong \rho_{V^*}$ y otro donde $\rho_V \ncong \rho_{V^*}$ [Indicación: Considerar $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$]

Recuerdo (MAT210): Dada $A \in M_n(\mathbb{C})$, entonces $P_A(X) := \det(X I_n - A)$ es el POLINOMIO CARACTERÍSTICO de A. Además,

$m_A(X) :=$ polinomio complejo con coef. principal 1 y de grado minimal tq $m_A(A) = 0$
(ie, si $Q \in \mathbb{C}[X]$ con coef. principal 1 cumple $Q(A) = 0 \Rightarrow m_A$ divide Q)

es el POLINOMIO MINIMAL de A. Un hecho importante es que:

ie, sólo tiene raíces simples

A diagonalizable $\iff$ m_A se factoriza en factores lineales distintos

[Teorema de Cayley-Hamilton: $P_A(A) = 0 \overset{\text{def}}{\iff} m_A$ divide P_A.]

Daremos una prueba sencilla en MAT214!

Caso particular importante: Sea G grupo finito y $\rho : G \to GL(V) \cong GL_n(\mathbb{C})$, $g \mapsto R_g$ representación $\Rightarrow R_g^N = I_n$ con $N = |G|$ (Teorema de Lagrange)

raíces simples!

$\rightsquigarrow m_{R_g}(X)$ divide $Q(X) = X^N - 1 = (X-1)(X-\xi)\cdots(X-\xi^{N-1})$ con $\xi = e^{\frac{2\pi i}{N}}$

$\Rightarrow$ R_g es diagonalizable $\forall g \in G$.

Proposición 3.5.9. — *Sean $\rho_V : G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\rho_W : G \to \mathrm{GL}(W)$ dos representaciones de un grupo G. Entonces:*

1. $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$.
2. $\chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W$.
3. $\chi_{V\otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W$.
4. *Si $W \subseteq V$ es una sub-representación, entonces $\chi_V = \chi_W + \chi_{V/W}$.*
5. $\chi_{S^2V}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2))$.
6. $\chi_{\Lambda^2 V}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2))$.

En particular, $\chi_{V\otimes V} = \chi_V^2 = \chi_{S^2V} + \chi_{\Lambda^2 V}$.

Recuerdo: $V\otimes V = S^2V \oplus \Lambda^2 V$

En $\Lambda^2 V$: $v\wedge w := \frac{1}{2}(v\otimes w - w\otimes v)$

En S^2V: $vw := \frac{1}{2}(v\otimes w + w\otimes v)$

Dem: Ya discutimos 1, 2, 3 y 4 ✓ Veamos 5 y 6:

Sea $g\in G$ y $\{e_1,\dots,e_n\}$ base de V de vectores propios de ρ_g (ie, $\rho_g(e_i) = \lambda_i e_i$ con $\lambda_i\in\mathbb{C}$)

$$\Rightarrow \rho_{g^2}(e_i) = (\rho_g\circ\rho_g)(e_i) = \rho_g(\lambda_i e_i) = \lambda_i^2 e_i \rightsquigarrow \chi_V(g) = \sum \lambda_i \quad y \quad \chi_V(g^2) = \sum \lambda_i^2$$

Una base de $\Lambda^2 V$ es $\{e_i\wedge e_j\}_{1\le i<j\le n} \rightsquigarrow$ vectores propios de $\rho_{\Lambda^2 V, g}$ con val. propios $\{\lambda_i\lambda_j\}_{1\le i<j\le n}$

$$\Rightarrow \chi_{\Lambda^2 V}(g) = \sum_{1\le i<j\le n} \lambda_i\lambda_j \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\Big(\sum_{1\le i\le n}\lambda_i\Big)^2 - \frac{1}{2}\sum_{1\le i\le n}\lambda_i^2 = \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)) \rightsquigarrow 6 ✓$$

Dado que $\chi_V^2 \overset{3}{=} \chi_{V\otimes V} \overset{2}{=} \chi_{\Lambda^2 V} + \chi_{S^2 V} \overset{6}{\Rightarrow} \chi_{S^2V}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2)) \rightsquigarrow 5$ ✓ ∎

(*) $\frac{1}{2}(a+b)^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2) - ab \iff ab = \frac{1}{2}(a+b)^2 - \frac{1}{2}(a^2+b^2)$

§ 22. Lema de Schur

Proposición 3.6.1 **(Lema de Schur).** — *Sean* $\rho_V : G \to \mathrm{GL}(V)$ *y* $\rho_W : G \to \mathrm{GL}(W)$ *dos representaciones* irreducibles *de un grupo* G*, y sea* $u : V \to W$ *un* morfismo *de representaciones. Entonces:*

1. u *es un isomorfismo o bien* $u = 0$.
2. *Si* $\rho_V \cong \rho_W$ *entonces* u *es una* homotecia*, i.e.,* $u = \lambda \mathrm{Id}_V$ *con* $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\rho_{V,g}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & W \arrow[d, "\rho_{W,g}"] \\ V \arrow[r, "u"] & W \end{tikzcd}$$

Dem: ① Como u es un morfismo $\Rightarrow$ $\ker(u)$ e $\mathrm{Im}(u)$ son G-invariantes

Si u no es un isomorfismo:

Si $\ker(u) \neq \{0_V\}$ $\underset{V \text{ irred}}{\Rightarrow}$ $\ker(u) = V$, ie, $u \equiv 0$ ✓

no iny.

no sobre

o bien, $\ker(u) = \{0_V\}$ pero $\mathrm{Im}(u) \neq W$ $\underset{W \text{ irred}}{\Rightarrow}$ $\mathrm{Im}(u) = \{0_W\}$, ie, $u \equiv 0$ ✓

② Si $\rho_V = \rho_W$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ valor propio de u

$\Rightarrow$ $\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_V)$ es G-invariante y $\neq \{0_V\}$ (por def. de valor propio)

$\underset{V \text{ irred}}{\Rightarrow}$ $\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_V) = V$, ie, $\forall v \in V$, $u(v) - \lambda v = 0$, ie, $u = \lambda \mathrm{Id}_V$ ∎

Corolario 3.6.2. — *Sean $\rho_V : G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\rho_W : G \to \mathrm{GL}(W)$ dos representaciones irreducibles de un grupo G, y sea $u : V \to W$ una* aplicación lineal *arbitraria. Consideremos la aplicación*

no nec. un morfismo!

$$u^0 := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{W,g}^{-1} \circ u \circ \rho_{V,g},$$

la cual define un morfismo de representaciones $u^0 : V \to W$. Más aún,

1. *Si ρ_V y ρ_W no son isomorfas, entonces $u^0 = 0$.*
2. *Si $\rho_V \cong \rho_W$, entonces u^0 es una homotecia de factor $\frac{\mathrm{tr}(u)}{\dim_{\mathbb{C}}(V)}$.*

Dem: Veamos que u^0 es un morfismo de repr, ie, $\rho_{W,g} \circ u^0 = u^0 \circ \rho_{V,g}$ $\forall g \in G$:

$$\rho_{W,g}^{-1} \circ u^0 \circ \rho_{V,g} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \underbrace{\rho_{W,g}^{-1} \rho_{W,h}^{-1}}_{\rho_{W,hg}^{-1}} u \underbrace{\rho_{V,h} \rho_{V,g}}_{\rho_{V,hg}} \overset{h \mapsto hg}{=} u^0 \quad ✓$$

Schur 1 $\Rightarrow u^0 = 0$ ✓

Schur 2 $\Rightarrow u^0 = \lambda \mathrm{Id}_V$ y $\mathrm{tr}(u^0) = \lambda \,\mathrm{tr}(\mathrm{Id}_V) = \lambda \dim_{\mathbb{C}}(V)$

Además, $\mathrm{tr}(u^0) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \underbrace{\mathrm{tr}(\rho_{V,g}^{-1}\, u\, \rho_{V,g})}_{\mathrm{tr}(u)} = \frac{\cancel{|G|}}{\cancel{|G|}} \mathrm{tr}(u) \Rightarrow \lambda = \frac{\mathrm{tr}(u)}{\dim_{\mathbb{C}}(V)}$ ∎

⚠ **Observación importante:** Matricialmente, el corolario anterior dice que:

Si $R_{V,g} = (a_{i_1 j_1}(g))$, $R_{W,g}\,(a_{i_2 j_2}(g))$, $\mathcal{U} = (u_{i_2 i_1})$ y $\mathcal{U}^\circ = (u^\circ_{i_2 i_1})$. Entonces:

$$u^\circ_{i_2 i_1} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{g\in G \\ j_1, j_2}} a_{i_2 j_2}(g^{-1})\, u_{j_2 j_1}\, a_{j_1 i_1}(g) \quad \leftarrow \text{Forma lineal en las variables } u_{j_2 j_1} \quad (\bigstar)$$

con coeficientes

Así,

① $\iff$ si $\rho_V \not\cong \rho_W$ entonces $\boxed{\sum_{g\in G} a_{i_2 j_2}(g^{-1})\, a_{j_1 i_1}(g) = 0 \quad \forall\, i_1, i_2, j_1, j_2}$

② $\iff$ si $\rho_V \cong \rho_W$ entonces $u^\circ_{i_2 i_1} = \dfrac{tr(u)}{\dim_{\mathbb{C}}(V)} \delta_{i_2 i_1} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{1}{\dim_{\mathbb{C}}(V)} \sum_{j_1, j_2} \delta_{i_2 i_1} \delta_{j_2 j_1} u_{j_2 j_1}$

Recuerdo: $\delta_{i_2 i_1} = \begin{cases} 1 & \text{si } i_2 = i_1 \\ 0 & \text{si } i_2 \neq i_1 \end{cases}$ y luego $tr(u) = \sum_{j_1, j_2} \delta_{j_2 j_1} u_{j_2 j_1}$

$(\bigstar) \Rightarrow \dfrac{1}{|G|} \sum_{\substack{g\in G \\ j_1, j_2}} a_{i_2 j_2}(g^{-1})\, u_{j_2 j_1}\, a_{j_1 i_1}(g) \overset{②}{=} \dfrac{1}{\dim_{\mathbb{C}}(V)} \sum_{j_1, j_2} \delta_{i_2 i_1} \delta_{j_2 j_1} u_{j_2 j_1}$ ← Igualdad de formas lineales!

Comparar coef de $u_{j_2 j_1}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\dfrac{1}{|G|} \sum_{g\in G} a_{i_2 j_2}(g^{-1})\, a_{j_1 i_1}(g) = \dfrac{1}{\dim_{\mathbb{C}}(V)} \delta_{i_2 i_1} \delta_{j_2 j_1} = \begin{cases} 1/\dim_{\mathbb{C}}(V) & \text{si } i_1 = i_2 \text{ y } j_1 = j_2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}}$

Conclusión: Si para $\varphi, \psi : G \to \mathbb{C}$ funciones arbitrarias definimos el producto bilineal

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g^{-1}) \psi(g) \overset{g \overset{\sim}{\mapsto} g^{-1}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \psi(g^{-1}) \overset{\text{def}}{=} \langle \psi, \varphi \rangle$$

Entonces, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} ① \iff \langle a_{i_2 j_2}, a_{j_1 i_1} \rangle = 0 \quad \forall\, i_1, i_2, j_1, j_2 \\[2ex] ② \iff \langle a_{i_2 j_2}, a_{j_1 i_1} \rangle = \dfrac{1}{\dim_{\mathbb{C}}(V)} \delta_{i_2 i_1} \delta_{j_2 j_1} \end{array}\right\} \text{“Relaciones de ortogonalidad”}$$

En part, si las matrices $(a_{ij}(g))$ son unitarias entonces $(a_{ij}(g^{-1})) = (\overline{a_{ji}(g)})$, y luego ① y ② se traducen en (genuinas) relaciones de ortogonalidad respecto al producto interno hermitiano dado por

$$(\varphi | \psi) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \overline{\psi(g)} = \langle \varphi, \psi^* \rangle \quad \text{donde } \psi^*(g) := \overline{\psi(g^{-1})} \quad \text{ADJUNTO}$$