Clase 10: Representaciones irreducibles y Tensores

§19. Representaciones Irreducibles

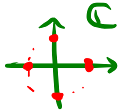
Eslogan: "Las representaciones irreducibles son los bloques elementales a partir de los cuales se construyen todas las representaciones de un grupo" (cf. Física!)

Def: Sea $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ una representación. Decimos que (V, ρ) es una REPRESENTACIÓN IRREDUCIBLE (o SIMPLE) si $V \neq \{0\}$ y si $\{0\}$ y V son sus únicas subrepresentaciones (ie, si $W \subseteq V$ sub-ev G-invariante $\Rightarrow W = \{0\}$ ó V).

Ejemplos:

① Toda representación $V \simeq \mathbb{C}$ de grado 1 es automáticamente irreducible.

② $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tiene exactamente n repr. irred. de grado 1: $\rho : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^\times$ está determinado por la imagen de un generador $\omega := \rho([1]_n) \in \mathbb{C}^\times$. Además, $\rho([k]_n)^n = 1 \;\; \forall [k]_n \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightsquigarrow \rho_0, \dots, \rho_{n-1}$ representaciones dadas por



$$\rho_j([k]_n) := \exp\left(k \frac{2\pi j}{n} i\right) \quad \forall [k]_n \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad (j = 0, \dots, n-1).$$

③ [Atención: grupos infinitos!] Si $\dim_{\mathbb{C}}(V) \geq 2$, las representaciones estandar de $SL(V)$ y $GL(V)$ son irreducibles, pues estos grupos actúan transitivamente en $V \setminus \{0\}$.

{Cultura general} La Teoría de representaciones de grupos infinitos es más complicada, y tiene consecuencias muy interesantes! Por ejemplo, el "Teorema de Peter-Weyl" (1927) aplicado a $G = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| = 1\}$ permite deducir la teoría de series de Fourier vista en MAT023!

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que toda representación irreducible de G es de grado $\leq |G|$.
[Indicación: Considerar $v \in V \setminus \{0\}$ y $W := \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \langle \rho_g(v), g \in G \rangle$.]

④ $G = S_n$: la representación de permutación $\rho_{perm}: S_n \hookrightarrow GL_n(\mathbb{C})$, $\sigma \longmapsto P_\sigma$ NO es irreducible, pues
$L = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \langle (1, \dots, 1) \rangle \simeq \mathbb{C}$ y $H = \{x \in \mathbb{C}^n \text{ tq } x_1 + \dots + x_n = 0\} \simeq \mathbb{C}^{n-1}$
son S_n-invariantes!

Teorema (Maschke, continuación): <u>Toda</u> representación de un grupo finito G es suma directa de representaciones irreducibles.

Dem: Sea $\rho: G \to GL(V)$ representación. Usamos inducción en $\dim_{\mathbb{C}}(V)$:

$\dim_{\mathbb{C}}(V) = 1$ ✓ Sup. $\dim_{\mathbb{C}}(V) \geq 2$:

Si V es irreducible $\rightsquigarrow$ OK ✓ Sino: $\exists\ \{0\} \neq W \subsetneq V$ subev G-invariante

Maschke $\Rightarrow$ $V = W \oplus W'$, con W' G-invariante y $\dim_{\mathbb{C}} W, \dim_{\mathbb{C}} W' < \dim_{\mathbb{C}} V$

Hip. de Ind $\Rightarrow$ W & W' son suma directa de repr. irred $\Rightarrow$ V también ∎

La descomposición $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ en representaciones irreducibles <u>NO</u> es única.

(eg. $\rho: G \to GL(V)$, $g \mapsto Id_V$ $\forall g \in G$. Si $\dim_{\mathbb{C}}(V) \geq 2 \rightsquigarrow W_i$ son rectas!)

Sin embargo, veremos más adelante que <u>dada</u> W repr. irred entonces el <u>número</u> de W_i tal que $W_i \cong W$ <u>no depende de la descomposición</u>.

§ 20. Producto tensorial de espacios vectoriales

Motivación: Ya conocen varias formas de construir e.v. nuevos a partir de e.v. dados (e.g. suma directa, cociente, dual, etc) $\rightsquigarrow$ Nuevas representaciones!

Estudiaremos brevemente una nueva construcción:

Sea k un cuerpo (e.g. $k = \mathbb{C}$) y sean V, W y U tres k-ev. Una APLICACIÓN BILINEAL es una función

$$B : V \times W \longrightarrow U \quad , \quad (x,y) \longmapsto B(x,y)$$

que cumple:

1) $B(\cdot, y) : V \to U$, $x \mapsto B(x,y)$ es lineal $\forall\, y \in W$ fijo; y además
2) $B(x, \cdot) : W \to U$, $y \mapsto B(x,y)$ es lineal $\forall\, x \in V$ fijo.

Intuición: El producto tensorial $V \otimes W$ es un k-ev que cumple que toda $B : V \times W \to U$ bilineal equivale a cierta $\hat{B} : V \otimes W \to U$ lineal.

¡Propiedad Universal! (Más útil que la definición/construcción rigurosa de $V \otimes W$)

Def: Sean V y W k-ev. Un **PRODUCTO TENSORIAL** entre V y W es un par (T, t), donde T es un k-ev y $t : V \times W \to T$ aplicación <u>bilineal</u> verificando:

"$\forall\, \mathcal{U}$ k-ev y $\forall B : V \times W \to \mathcal{U}$ bilineal, $\exists!\, \hat{B} : T \to \mathcal{U}$ lineal tq $B = \hat{B} \circ t$"

ie, el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "B"] \arrow[d, "t"'] & \mathcal{U} \\ T \arrow[ur, "\exists!\, \hat{B}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. ← "Propiedad Universal del Producto Tensorial"

Teorema 3.4.2. — *Sean V y W dos k-espacios vectoriales. Existe un producto tensorial de V y W, denotado $V \otimes W$, el cual es único módulo un único isomorfismo.*

<u>Dem</u>: 1º <u>Existencia</u>: Considerar $k^{V \times W}$, ie, el k-ev de base $\{e_{(v,w)}\}_{(v,w) \in V \times W}$

⇝ Un vector de $k^{V \times W}$ es $\sum_{\text{finita}} \lambda_{(v,w)}\, e_{(v,w)}$

⚠ $V \times W \to k^{V \times W}$, $(v,w) \mapsto e_{(v,w)}$ <u>NO</u> es bilineal (eg. $e_{(\lambda v, w)} \neq \lambda e_{(v,w)}$, $\lambda \neq 1$)

Solución: "Cocientar todo lo malo" ⇝ Sea $S \subseteq k^{V \times W}$ el sub-ev generado por todos los vectores de la forma: $e_{(v+v', w)} - e_{(v,w)} - e_{(v',w)}$, $e_{(v, w+w')} - e_{(v,w)} - e_{(v,w')}$

$(v, v' \in V;\ w, w' \in W;\ \lambda \in k)$ $\quad e_{(\lambda v, w)} - \lambda e_{(v,w)}$, $e_{(v, \lambda w)} - \lambda e_{(v,w)}$

⇝ En $T := k^{V\times W}/S$ todas estas relaciones son cero! ⇝ $V\otimes W := T$

La composición

$$t: V\times W \longrightarrow k^{V\times W} \longrightarrow k^{V\times W}/S \overset{\text{def}}{=} V\otimes W \quad \text{es bilineal por def. de } S!$$

$$(v,w) \longmapsto e_{(v,w)} \longmapsto [e_{(v,w)}] =: v\otimes w$$

⚠ Si $B: V\times W \to \mathcal{U}$ es bilineal, entonces consideramos la aplicación lineal def por $\varphi: k^{V\times W} \to \mathcal{U}$, $e_{(v,w)} \mapsto B(v,w)$ $\Rightarrow$ φ se anula en S

$$\Rightarrow \exists!\ \hat{\varphi} =: \hat{B}: k^{V\times W}/S \overset{\text{def}}{=} V\otimes W \to \mathcal{U} \text{ tal que } \hat{B}(v\otimes w) = B(v,w).$$

Prop. Univ. del Cociente!

2º **Unicidad**: Sea (T', t') otro producto tensorial. La prop. universal implica:

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "t'", "\text{bilineal}"'] \arrow[d, "t"'] & T' \\ T \arrow[ur, "\exists!\,\alpha"'] & \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "t", "\text{bilineal}"'] \arrow[d, "t'"'] & T \\ T' \arrow[ur, "\exists!\,\beta"'] & \end{tikzcd} \qquad t' = \alpha\circ t \rightsquigarrow t = \beta\circ t'$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} t &= \beta\circ t' = \beta\circ\alpha\circ t = \mathrm{Id}_T\circ t \\ t' &= \alpha\circ t = \alpha\circ\beta\circ t' = \mathrm{Id}_{T'}\circ t' \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\alpha \text{ y } \beta \text{ únicos}} \begin{aligned} \alpha\circ\beta &= \mathrm{Id}_{T'} \text{ y} \\ \beta\circ\alpha &= \mathrm{Id}_T \end{aligned} \quad \blacksquare$$

$\Rightarrow \alpha\circ\beta$ y $\beta\circ\alpha$ también!

Obs importante: Por construcción, si $\{v_i\}_{i\in I}$ (resp. $\{w_j\}_{j\in J}$) base de V (resp. W) $\Rightarrow \{v_i\otimes w_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ base de $V\otimes W$. En part, $\dim_k(V\otimes W) = \dim_k(V)\dim_k(W)$. } Muy útil!

Recuerdo/Notación: Si $V, W, \mathcal{U}$ son $\Bbbk$-ev, entonces:

$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W) = \{\varphi : V \to W \text{ lineal}\}$, $V^* = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,\Bbbk)$ y $\mathrm{Bil}_{\Bbbk}(V\times W, \mathcal{U}) := \{B : V\times W \to \mathcal{U} \text{ bilineal}\}$

Corolario: $\mathrm{Bil}_{\Bbbk}(V\times W, \mathcal{U}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V\otimes W, \mathcal{U})$, $B \mapsto \hat{B}$ es un isomorfismo de $\Bbbk$-ev.

En part, $\{B : V\times W \to \Bbbk \text{ forma bilineal}\} \cong (V\otimes W)^*$.

***Proposición 3.4.5* (functorialidad).** — *Sean $f : V \to V'$ y $g : W \to W'$ son aplicaciones lineales. Entonces existe una única aplicación lineal*

$$f \otimes g : V \otimes W \to V' \otimes W'$$

tal que $(f\otimes g)(v\otimes w) = f(v)\otimes g(w)$ para todos $v \in V$, $w \in W$. Más aún, $(f'\otimes g')\circ(f\otimes g) = (f'\circ f)\otimes(g'\circ g)$. $\boxed{\text{Ejercicio}}$

Dem: $f : V \to V'$ y $g : W \to W'$ $\rightsquigarrow$ $f\times g : V\times W \xrightarrow{\text{lineal}} V'\times W'$, $(v,w) \mapsto (f(v), g(w))$

Consideramos

$$\begin{array}{ccc} V\times W & \xrightarrow{f\times g} & V'\times W' \\ t\downarrow & \searrow^{\varphi}_{\text{bilineal}} & \downarrow t' \\ V\otimes W & \xrightarrow{\exists!\, f\otimes g} & V'\otimes W' \end{array}$$

$\varphi(v,w) \overset{\text{def}}{=} \underbrace{f(v)\otimes g(w)}_{\text{bilineal}}$ $\overset{\text{Prop univ}}{\Longrightarrow}$ $\exists!\ f\otimes g : V\otimes W \to V'\otimes W'$

tq $(f\otimes g)(v\otimes w) = f(v)\otimes g(w)$ ∎

Proposición 3.4.7. — *Sean U, V y W tres k-espacios vectoriales. Hay isomorfismos canónicos:*

1. $k \otimes V \xrightarrow{\sim} V$, $\lambda \otimes v \mapsto \lambda v$.
2. $(U \oplus V) \otimes W \xrightarrow{\sim} (U \otimes W) \oplus (V \otimes W)$, $(u+v) \otimes w \mapsto u \otimes w + v \otimes w$.
3. $U \otimes V \xrightarrow{\sim} V \otimes U$, $u \otimes v \mapsto v \otimes u$.
4. $U \otimes (V \otimes W) \xrightarrow{\sim} (U \otimes V) \otimes W$, $u \otimes (v \otimes w) \mapsto (u \otimes v) \otimes w$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$

[Indicación: ¡Propiedad Universal!]

__Ejemplo importante__ (Producto de Kronecker, cf MAT266 "Análisis de Regresión")

Consideremos $f: V_1 \longrightarrow V_2$ y $g: W_1 \longrightarrow W_2$ lineales y sean:

$\{v_{1,j}\}_{j \in I_1}$ base de V_1, $\{w_{1,\ell}\}_{\ell \in J_1}$ base de W_1

$\{v_{2,i}\}_{i \in I_2}$ base de V_2, $\{w_{2,k}\}_{k \in J_2}$ base de W_2

$\rightsquigarrow$ $A = (a_{ij})_{i \in I_2, j \in I_1}$, $B = (b_{k\ell})_{k \in J_2, \ell \in J_1}$

$$\Rightarrow \text{Bilinealidad}: (f \otimes g)(v_{1,j} \otimes w_{1,\ell}) = f(v_{1,j}) \otimes g(w_{1,\ell}) = \sum_{i \in I_2, k \in J_2} a_{ij} b_{k\ell} \, v_{2,i} \otimes w_{2,k}$$

Luego, la matriz de $f \otimes g$ es $A \otimes B := (a_{ij} b_{k\ell})_{\substack{(i,k) \in I_2 \times J_2 \\ (j,\ell) \in I_1 \times J_1}}$ "Producto de Kronecker"

Por ejemplo, si V_1, V_2, W_1, W_2 son todos de dimensión 2 y que elegimos el orden $(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)$ en el conjunto $\{1,2\}\times\{1,2\}$ ($\rightsquigarrow$ bases ordenadas!):

$$A\otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ \hline a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{array}\right)$$

En particular, observamos que si A y B son matrices cuadradas, entonces
$$\mathrm{tr}(A\otimes B) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B).$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$* Probar que si $A\in M_n(k)$ y $B\in M_m(k)$ son matrices cuadradas, entonces
$$\det(A\otimes B) = \det(A)^m \det(B)^n$$
[Indicación: Notar que $f\otimes g = (f\otimes \mathrm{Id})\circ(\mathrm{Id}\otimes g)$. Obs: En $k=\mathbb{C}$ $\rightsquigarrow$ Forma can. de Jordan]

Consecuencia: Si $A\in M_n(k)$ y $B\in M_m(k)$, entonces
$$A\otimes B\in GL_{mn}(k) \iff A\in GL_n(k) \text{ y } B\in GL_m(k).$$

De vuelta a las representaciones: Sea $k=\mathbb{C}$ y sea $\{e_1,\dots,e_n\}$ base de $V\cong\mathbb{C}^n$.

Consideremos el automorfismo

$$\Theta: V\otimes V \xrightarrow{\sim} V\otimes V, \quad e_i\otimes e_j \longmapsto e_j\otimes e_i.$$

Dado que los $\{e_i\otimes e_j\}_{i,j=1,\dots,n}$ forman una base de $V\otimes V\cong\mathbb{C}^{n^2}$, tenemos que $\Theta(v\otimes w)=w\otimes v$ $\forall v,w\in V$ y *a posteriori* Θ es indep. de la base elegida.

⚠ Dado que $\Theta^2=\mathrm{Id}_{V\otimes V}$, tenemos (Cayley-Hamilton) que Θ es diagonalizable con espacios propios:

(1°) $S^2V=\mathrm{Sym}^2V:=\{t\in V\otimes V \text{ tq } \Theta(t)=t\}$ "CUADRADO SIMÉTRICO"

de base $\{e_ie_j:=\frac{1}{2}(e_i\otimes e_j+e_j\otimes e_i)\}_{1\le i\le j\le n}$, y luego $\dim_{\mathbb{C}}S^2V=\frac{n(n+1)}{2}$

(2°) $\Lambda^2V=\mathrm{Alt}^2(V):=\{t\in V\otimes V \text{ tq } \Theta(t)=-t\}$ "CUADRADO ALTERNADO"

de base $\{e_i\wedge e_j:=\frac{1}{2}(e_i\otimes e_j-e_j\otimes e_i)\}_{1\le i< j\le n}$, y luego $\dim_{\mathbb{C}}\Lambda^2V=\frac{n(n-1)}{2}$

$\Rightarrow T^2V:=V\otimes V=S^2V\oplus\Lambda^2V$ suma directa ($\underline{\text{Obs}}$: $v\otimes w=vw+v\wedge w$)

Def: Sean $\rho_1 : G \to GL(V_1)$ y $\rho_2 : G \to GL(V_2)$ representaciones de G.
La representación PRODUCTO TENSORIAL está dada por:

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 : G \longrightarrow GL(V_1 \otimes V_2), \quad g \mapsto \rho_g$$

donde $\rho_g(v_1 \otimes v_2) := \rho_{1,g}(v_1) \otimes \rho_{2,g}(v_2)$ para todo $g \in G$, $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$.

Obs: Matricialmente, $R_g = R_{1,g} \otimes R_{2,g}$ (producto de Kronecker).

Caso particular importante: Si $V_1 = V_2 =: V$, obtenemos $T^2 V = V \otimes V$ y

$$\rho_{T^2V} : G \longrightarrow GL(T^2 V), \quad g \longmapsto \rho_{T^2V,g}$$

donde $\rho_{T^2V,g}(v \otimes w) = \rho_g(v) \otimes \rho_g(w)$.

$\boxed{\text{Ejercicio importante}}$ Probar que $S^2V \subseteq T^2V$ y $\Lambda^2 V \subseteq T^2 V$ son G-invariantes.

Consecuencia: ρ_{T^2V} induce $\rho_{S^2V} : G \to GL(S^2V)$ y $\rho_{\Lambda^2V} : G \to GL(\Lambda^2 V)$ subrepresentaciones.