Clase 9: Representaciones de grupos finitos (primeras definiciones)

§ 17. Representaciones lineales

En todo lo que sigue, G será un grupo finito y V un $\mathbb{C}$-ev. de dimensión finita (ie, $V \cong \mathbb{C}^n$ para cierto $n \in \mathbb{N}$). En particular,

$$GL(V) = \{ \varphi : V \xrightarrow{\sim} V \text{ isomorfismo lineal} \} \cong GL_n(\mathbb{C}).$$

Motivación:

GRUPOS

① $G \hookrightarrow S_N$ o matrices de permutación

$\wr$

② Def. de grupo "abstracto" (cf. Clase 1)

$\wr$

③ Frobenius (1896): $\rho : G \longrightarrow GL(V)$

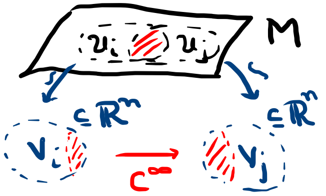
Teoría de Representaciones

VARIEDADES DIFERENCIABLES

① $M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$

$\wr$

② Def. de variedad "abstracta"



$\wr$

③ Whitney (1944): $M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$, $N = 2 \dim_{\mathbb{R}}(M)$

Def: Una REPRESENTACIÓN (lineal) del grupo G en V es un morfismo de grupos

$$\rho : G \longrightarrow GL(V), \quad g \longmapsto \rho(g) =: \rho_g .$$

i.e., $\rho_{gh} = \rho_g \circ \rho_h \;\; \forall g, h \in G$. En part, $\rho_e = Id_V$ y $\rho_{g^{-1}} = (\rho_g)^{-1} \;\; \forall g \in G$.

Observaciones / Terminología:

① Si (V, ρ) es una representación de G, entonces G actúa en V mediante $(g, v) \longmapsto g \cdot v := \rho_g(v) \in V$. Se dice que "$V$ es un G-módulo".

② Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ base de $V \Rightarrow GL(V) \cong GL_n(\mathbb{C})$, $\rho_g \longmapsto R_g$ matriz $\forall g \in G$. En part, $\det(R_g) \neq 0$ y $R_{gh} = R_g R_h \;\; \forall g, h \in G$.

③ El GRADO de una representación (V, ρ) de G es simplemente $\dim_{\mathbb{C}}(V)$.

④ Si $\rho : G \hookrightarrow GL(V)$ es inyectivo, decimos que es una REPRESENTACIÓN FIEL de G.

Ejemplos:

Matrices 1×1 invertibles

① Una representación de grados 1 de G es $\rho : G \longrightarrow GL_1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\times$ morfismo de grupos. Más aún, como $|G| < +\infty$, todo $g \in G$ es de orden finito $\mathrm{ord}(g) \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow 1 = \rho(e) = \rho(g^{\mathrm{ord}(g)}) = \rho(g)^{\mathrm{ord}(g)}$, i.e., $\rho(G) \subseteq S^1 := \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| = 1\}$.

⚠ Hecho (cf. Tarea 1): Todo subgrupo finito de $\mathbb{C}^\times$ es cíclico ($\Rightarrow \underbrace{\rho(G)}_{\cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ cíclico), $n = \dfrac{|G|}{|\ker \rho|}$

Lagrange + Noether

② La REPRESENTACIÓN TRIVIAL de G es

$$\rho_{\text{trivial}} : G \longrightarrow \mathbb{C}^\times, \quad g \mapsto 1 \quad \forall g \in G.$$

③ Si desde un comienzo $G \subseteq GL_n(\mathbb{C})$, la inclusión $\rho_{\text{est}} : G \hookrightarrow GL_n(\mathbb{C}), g \mapsto g$ es la REPRESENTACIÓN ESTÁNDAR de G.

↳ Obs: Si $S_n \cong G \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ es el grupo de matrices de permutación, decimos que $\rho_{\text{perm}} : S_n \hookrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ es la REPRESENTACIÓN DE PERMUTACIÓN.

$$\sigma \longmapsto P_\sigma$$

⚠ Ejemplo importante: Sup. que $|G| = N$ y sea $V = \mathbb{C}^N$ con base canónica $\{e_g\}_{g\in G}$ (indexada por los elementos de G). Definimos la REPRESENTACIÓN REGULAR de G mediante:

$$\rho_g : \mathbb{C}^N \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^N$$

$$\rho_{reg} : G \hookrightarrow GL(V) \cong GL_N(\mathbb{C}), \quad g \mapsto \rho_g \quad \text{donde } \rho_g(e_h) := e_{gh} \quad \forall g, h \in G.$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que ρ_{reg} es una representación fiel.

Más generalmente, si $G \curvearrowright X$ conjunto finito con $\mathrm{Card}(X) = N$, y consideramos $V = \mathbb{C}^N$ con base canónica $\{e_x\}_{x\in X}$, definimos la REPRESENTACIÓN DE PERMUTACIÓN asociada a $G \curvearrowright X$ mediante:

$$\rho_g : \mathbb{C}^N \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^N$$

$$\rho_{perm} : G \longrightarrow GL(V) \cong GL_N(\mathbb{C}), \quad g \mapsto \rho_g \quad \text{donde } \rho_g(e_x) := e_{g\cdot x} \quad \forall g \in G, \forall x \in X.$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ ¿Cuándo ρ_{perm} (asociada a $G \curvearrowright X$) es fiel?

§18. Subrepresentaciones y morfismos

¿Cuándo dos representaciones (V, ρ_V) y (W, ρ_W) de G son "isomorfas"?

Def: Un MORFISMO entre dos representaciones $\rho_V : G \to GL(V)$ y $\rho_W : G \to GL(W)$ es una aplicación lineal $\varphi : V \to W$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho_{V,g}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & W \arrow[d, "\rho_{W,g}"] \\ V \arrow[r, "\varphi"] & W \end{tikzcd}$$

"φ es G-lineal"

sea conmutativo $\forall g \in G$ (ie, $\varphi \circ \rho_{V,g} = \rho_{W,g} \circ \varphi \ \forall g \in G$). En el caso particular en que $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ sea un isomorfismo de $\mathbb{C}$-ev, decimos que φ es un ISOMORFISMO DE REPRESENTACIONES de G y escribimos $(V, \rho_V) \cong (W, \rho_W)$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $\rho : G \to GL(V)$ representación tal que $\exists\, v_0 \in V$ tq $\{\rho_g(v_0)\}_{g \in G}$ es una base de V. Probar que $(V, \rho) \cong (\mathbb{C}^{|G|}, \rho_{reg})$ repr. regular.

Es natural considerar representaciones "dentro" de una representación dada:

Def: Sea $\rho : G \to GL(V)$ representación y sea $W \subseteq V$ un sub-ev. Decimos que W es G- INVARIANTE o G- ESTABLE si:

"Para todo $w \in W$ y todo $g \in G$, se tiene que $\rho_g(w) \in W$."

En part, $\rho^W_g := \rho_g|_W : W \xrightarrow{\sim} W$ cumple $\rho^W_{gh} = \rho^W_g \rho^W_h$ $\forall g, h \in G$, i.e., $\rho^W : G \to GL(W)$ es una SUBREPRESENTACIÓN de G.

$\rho_g : V \xrightarrow{\sim} V \rightsquigarrow \rho_g|_W : W \to V \underset{W \text{ invariante}}{\rightsquigarrow} \rho_g|_W : W \xrightarrow{\sim} W$

Ejemplos:

① Sea $\rho : G \to GL(V)$ representación. Si $W \subseteq V$ es G-invariante, entonces la inclusión $i : W \hookrightarrow V$, $w \mapsto w$ define un morfismo $(W, \rho^W) \hookrightarrow (V, \rho)$.

② Sea $\rho : G \to GL(V)$ representación. El sub-ev de vectores invariantes

$$V^G := \{ v \in V \text{ tq } \rho_g(v) = v \ \forall g \in G \}$$

es G-invariante (pues $\rho_g(v) = v \in V^G$ para todo $v \in V^G$).

③ Sea $V = \mathbb{C}^{|G|}$ la representación regular de G y sea $x := \sum_{g\in G} e_g = (1, \dots, 1) \in V$

$$\Rightarrow W := \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(x) \cong \mathbb{C} \text{ es } G\text{-invariante, pues } \rho_g(x) = \sum_{h\in G} \rho_g(e_h) \overset{\text{def de } \rho_{reg}}{=} \sum_{h\in G} e_{gh} \overset{\text{Convencerse!}}{=} x$$

para todo $g \in G$. Luego, $\rho_{reg}^{W} \cong \rho_{trivial}$.

④ Sea $\rho : G \to GL(V)$ representación. Si $W \subseteq V$ es G-invariante, entonces el cociente $\pi : V \to V/W$, $v \mapsto [v]$ permite definir una REPRESENTACIÓN COCIENTE mediante

$$\rho_{V/W,g} : V/W \xrightarrow{\sim} V/W$$

$$\rho_{V/W} : G \to GL(V/W), \quad g \mapsto \rho_{V/W,g} \quad \text{donde } \rho_{V/W,g}([v]) := [\rho_g(v)]$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $\rho_{V/W}$ es efectivamente una representación de G.

Si $\varphi : V \to W$ morfismo de representaciones de G, entonces $\ker(\varphi) \subseteq V$ e $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq W$ son subrepresentaciones. Más aún, φ induce

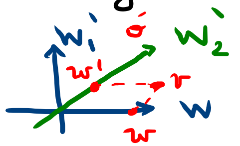
$$\hat{\varphi} : V/\ker(\varphi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(\varphi)$$

un isomorfismo de representaciones.

Recuerdo (MAT210): Sea V un $\mathbb{C}$-ev de dim. finita y $W, W' \subseteq V$ sub-evs. Entonces:

$V = W \oplus W' \iff$ Todo $v \in V$ se escribe de manera única como $v = w + w'$, $w \in W$ y $w' \in W'$

$\iff W \cap W' = \{0\}$ y $\dim_{\mathbb{C}}(V) = \dim_{\mathbb{C}}(W) + \dim_{\mathbb{C}}(W')$.



En tal caso decimos que W' un subesp. complementario de W en V.

La aplicación lineal $p = p_W : V \to V$, $v = w + w' \mapsto w$ es el PROYECTOR asociado a la suma directa $V = W \oplus W'$, y cumple $p^2 = p$, $\mathrm{Im}(p) = W$ y $\ker(p) = W'$.

Recíprocamente, dado $p : V \to V$ lineal tq $p^2 = p$ ("proyector") definimos $W' := \ker(p)$ y $W := \mathrm{Im}(p)$
$\Rightarrow V = W \oplus W'$ (espacios propios). Luego, hay una correspondencia

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Proyector } p : V \to V \\ \text{tal que } \mathrm{Im}(p) = W \end{array} \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} W' \text{ subesp. complementario} \\ \text{de } W \text{ en } V \end{array} \right\}$$

$$p \longmapsto \ker(p)$$

$$p_W : W \oplus W' \to W,\quad w + w' \mapsto w \quad \longleftarrow\!\shortmid \quad W'$$

Teorema 3.2.7 (Maschke, 1899). — *Sea $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación y sea $W \subseteq V$ un sub-espacio G-invariante. Entonces, existe un sub-espacio $W' \subseteq V$ que es G-invariante y que es complementario de W en V, es decir, tal que $V = W \oplus W'$.*

Dem: El producto interno hermitiano en $\mathbb{C}^n$

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}^n} := x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n}$$

induce (escoger una base) un prod. interno hermitiano $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{eucl}}$ en V. Definimos un nuevo producto:

$$\langle u, v \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho_g(u), \rho_g(v) \rangle_{\text{eucl}}$$

y notamos que es "G-invariante", i.e., si $g \in G$ entonces:

$$\langle \rho_g(u), \rho_g(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V \quad (\Leftrightarrow \rho_g \text{ son matrices unitarias resp. a } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ !})$$

En part, si W es G-invariante

$\Rightarrow W^{\perp} = \{ v \in V \text{ tq } \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in W \}$ es un complemento G-invariante de W ✓ ∎

Obs: Si $V = W \oplus W'$ con W, W' G-invariantes, y $v = w + w'$ con $w \in W$ y $w' \in W'$

$$\Rightarrow \rho_g(v) = \rho_g(w) + \rho_g(w') \overset{def}{=} \rho_g^{W}(w) + \rho_g^{W'}(w')$$

y luego ρ^W y $\rho^{W'}$ determinan ρ

Concretamente, si R_g y R_g' son las matrices asociadas a ρ_g^W y $\rho_g^{W'}$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} R_g & 0 \\ \hline 0 & R_g' \end{array}\right) \text{ es la matriz de } \rho_g.$$