Clase 4: Cocientes, Acciones de grupos y Órbitas

§ 8. Cocientes (continuación)

Resumen de la vez pasada: Sea $H \leq G$ subgrupo. Entonces,

← Automático si $H = \{e\}, G$ ó si G abeliano ó si $H = \ker(f)$

$H \trianglelefteq G$ normal $\overset{def}{\iff}$ $\forall g \in G$ y $\forall h \in H$, $ghg^{-1} \in H$

$\iff \forall g \in G$, $gH = Hg$ $\iff$ $G/H = H\backslash G$

$\iff$ G/H puede ser dotado de estructura de grupo

Teorema: de tal suerte que $\pi : G \to G/H$ es un morfismo.

$g \longmapsto gH \overset{def}{=} \{gh, h \in H\}$

Prop. Universal: Más aún, si $f : G \to G'$ morfismo tq $H \leq \ker(f)$, $H \trianglelefteq G$,
$\Rightarrow \exists! \ \hat{f} : G/H \to G'$ tal que $f(g) = \hat{f}(gH)$ $\forall g \in G$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & G' \\ G/H \arrow[ur, "\exists! \hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ Teorema del Isomorfismo (Emmy Noether): $G/\ker(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(f)$ $\forall f : G \to G'$

$\Rightarrow$ Aplicación: Dados $g \in G$, $\langle g \rangle \cong \mathbb{Z}$ ó bien $\langle g \rangle \cong \mathbb{Z}/\mathrm{ord}(g)\mathbb{Z}$

Sea G un grupo finito. El Teorema de Lagrange implica que $\mathrm{ord}(g)$ divide $|G|$ para todo $g \in G$. En part, si $|G| = p$ primo $\Rightarrow G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Ejemplos:

1. Sea $n \geq 3$, entonces $S_n / A_n \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pues $\varepsilon : S_n \twoheadrightarrow \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es sobreyectivo con $\ker(\varepsilon) = A_n$. $\rightarrow$ En part, hay tantas permutaciones pares como impares en S_n!

2. Sea $n \geq 2$. La restricción $\det|_{D_n} : D_n \leq O_2(\mathbb{R}) \twoheadrightarrow \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es sobreyectiva con kernel (de índice 2):
$$\ker(\det|_{D_n}) = \{ M \in D_n \text{ tq } \det(M) = 1\} = \{I_2, r, \ldots, r^{n-1}\} = \langle r \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

3. El morfismo $i : G \to \mathrm{Aut}(G)$, $g \mapsto [i_g : G \to G,\ x \mapsto g x g^{-1}]$ tiene $\mathrm{Im}(i) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Int}(G)$ y $\ker(i) = Z(G) \overset{\text{def}}{=} \{h \in G \text{ tq } hg = gh\ \forall g \in G\}$
$$\Rightarrow \mathrm{Int}(G) \cong G/Z(G)$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $\mathrm{Int}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$ es normal $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Out}(G) := \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Int}(G)$

AUTOMORFISMOS EXTERIORES

Proposición 2.1.30. — *Sea G un grupo y sea H un sub-grupo normal de G.*

1. *Si G es de tipo finito, G/H también es de tipo finito* ② . → H no es nec. fin. generado!
2. *Si H y G/H son de tipo finito, entonces G es de tipo finito.*

Dem: ① Si $A_0 \subseteq G$ subconj finito tq $G = \langle A_0 \rangle$ entonces $\pi(A_0) \subseteq G/H$ es un conj. finito generador de G/H, pues $\pi : G \twoheadrightarrow G/H$ sobreyectiva ✓

② Sea $A \subseteq G$ conj finito tq $\pi(A) \subseteq G/H$ sea generador.

Sea $B \subseteq H$ conj finito tq $H = \langle B \rangle$. Sea $x \in G$ arbitrario:

$[x] = [x_1]^{\varepsilon_1} \cdots [x_m]^{\varepsilon_m} = [x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_m^{\varepsilon_m}]$ en G/H con $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, $x_i \in A$.

$\Rightarrow y := x_m^{-\varepsilon_m} \cdots x_1^{-\varepsilon_1} x \in H \Rightarrow y = y_1^{s_1} \cdots y_n^{s_n}$ con $s_i \in \{\pm 1\}$, $y_i \in B$

$\Rightarrow x = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_m^{\varepsilon_m} y_1^{s_1} \cdots y_n^{s_n}$, ie, $G = \langle \underbrace{A \cup B}_{\text{finito}} \rangle$ ■

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $\mathbb{F}_q$ un cuerpo finito de q elementos. Probar que

a) $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1})$

b) $|SL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-2})\, q^{n-1}$

} Será útil más adelante (Teo. de Sylow)

[Indicación para a): ¿Cuántas posibilidades hay para la 1^{na} columna? Fijada la 1^{na}, ¿cuántas posibilidades hay para la 2^{da} columna?, etc.]

Obs/Recuerdo (Cociente de k-ev): Sea k un cuerpo, V un k-ev, $W \subseteq V$ sub-ev

grupos abelianos

Notar que $(W,+) \trianglelefteq (V,+)$ normal $\rightsquigarrow$ $(V/W, +)$ grupo abeliano cociente.

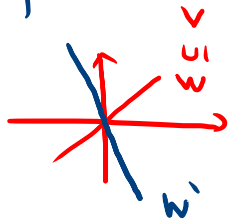
MAT210: V/W es un k-ev y $\pi : V \to V/W$ aplicación lineal.
con $\ker(\pi) = W$.

Idea: Si $\lambda \in k$ y $x \in V$, definimos $\lambda \cdot [x] := [\lambda x]$ (bien definido?)

Prop universal: Si $\varphi : V \to V'$ aplicación lineal tq $W \subseteq \ker(\varphi)$
$\Rightarrow \exists! \ \hat{\varphi} : V/W \to V'$ lineal tal que $\varphi = \hat{\varphi} \circ \pi$, i.e.,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & V' \\ V/W \arrow[ur, "\exists! \hat{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

conmutativo.



Si $W' \subseteq V$ sub ev tq $V = W \oplus W'$ $\Rightarrow$ $\pi|_{W'} : W' \xrightarrow{\sim} V/W$
isomorfismo $\rightsquigarrow$ NO es intrínseco (pues W' no es único)

$\hookrightarrow$ FALSO para grupos, i.e., $H \trianglelefteq G \not\Rightarrow G \cong H \times (G/H)$
(e.g. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong A_3 \trianglelefteq S_3$ y $S_3/A_3 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ambos abelianos).

§9. Acción de un grupo sobre un conjunto

Una de las maneras más concretas de comprender (y clasificar) grupos es observar su acción sobre un conjunto:

Def: Una ACCIÓN (izquierda) de un grupo G sobre un conjunto $X \neq \emptyset$ es:

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Notación: $G \curvearrowright X$

aplicación tal que

1) $\forall x \in X$, $e \cdot x = x$ (la identidad actúa trivialmente)

2) $\forall g, h \in G$ y $x \in X$, $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ (acción compatible con ley de grupo)

Obs: Una ACCIÓN DERECHA $X \curvearrowleft G$ es $(g, x) \longmapsto x \cdot_d g$ que satisface (1) y $(x \cdot_d h) \cdot_d g = x \cdot_d (hg)$. Notar que $g \cdot x \overset{def}{:=} x \cdot_d g^{-1}$ es una acción izquierda. En part, basta considerar acciones por la izquierda!

Sea $G \curvearrowright X$ una acción. Si definimos $\Phi_g(x) := g \cdot x$ entonces:

① $\iff$ $\Phi_e = Id_X$

② $\iff$ $\Phi_{g_1} \circ \Phi_{g_2} = \Phi_{g_1 g_2}$ $\quad (\Rightarrow \Phi_{g^{-1}} = \Phi_g^{-1} \quad \forall g \in G)$

Es decir, una acción $G \curvearrowright X$ es equivalente a un morfismo de grupos

$$\begin{aligned} \Phi : G &\longrightarrow Biy(X) = \{\text{Biyecciones de } X\} \\ g &\longmapsto \Phi_g \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ $\ker(\Phi)$ es el KERNEL de la acción $G \curvearrowright X$.

Ejemplos:

① $Biy(X)$ actúa sobre X mediante $(f, x) \longmapsto f(x)$.
En particular, $S_n \curvearrowright \{1, \dots, n\}$.

② $GL_n(k) \curvearrowright V \cong k^n$ mediante $(A, v) \longmapsto Av$

③ Si $H \leq G$, entonces $G \curvearrowright G/H$ mediante $(g, xH) \longmapsto (gx)H$.
En part, si $H = \{e\}$, $G \curvearrowright G$ mediante $(g, x) \longmapsto gx$.

④ Definimos el SEMI-PLANO DE POINCARÉ por

$$\mathbb{H} := \{ z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \mathrm{Im}(z) > 0 \}$$

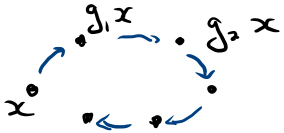
Entonces $SL_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{H}$, mediante $\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ $\boxed{\text{Ejercicio}}$

§ 10. Órbitas

Introduzcamos un poco de la "jerga" típica de acciones de grupos:

Sea $G \curvearrowright X$ acción. Consideremos la relación de equivalencia en X:

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} \exists g \in G \text{ tq } y = g \cdot x$$



La clase de $x \in X$ es llamada la ÓRBITA DE $x \in X$

$$G \cdot x := \{ g \cdot x ,\ g \in G \}$$

El COCIENTE DE X POR G es $G \backslash X := G/\sim \overset{\text{def}}{=} \{ G \cdot x ,\ x \in X \}$ ← ¡Atención con la Notación!

(o bien X/G si $X \circlearrowleft G$ acción derecha)

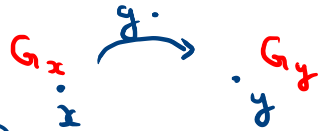
Def: Dada $G \curvearrowright X$ acción y $x \in X$, el ESTABILIZADOR o GRUPO DE ISOTROPÍA de x es el subgrupo de G

$$G_x := \{ g \in G \text{ tal que } g \cdot x = x \}$$

La aplicación $G \longrightarrow G \cdot x$, $g \longmapsto g \cdot x$ se factoriza en una biyección $G/G_x \xrightarrow[\sim]{1:1} G \cdot x$, $g G_x \longmapsto g \cdot x$!

En part, si G es un grupo finito entonces $G \cdot x$ es un conjunto finito de $\operatorname{Card}(G \cdot x) = \operatorname{Card}(G/G_x) \overset{\text{def}}{=} [G : G_x] = |G| / |G_x|$ (Lagrange)

$\Rightarrow$ $\operatorname{Card}(G \cdot x)$ divide $|G|$ (Obs: $|G| / \operatorname{Card}(G \cdot x) = |G_x|$)



Obs (estabilizadores de puntos en la misma órbita):

Si $G \curvearrowright X$ y si $x \sim y$ (ie, $\exists g \in G$ tq $y = g \cdot x$) entonces

$$G_y \underset{\text{def}}{=} \{ h \in G \text{ tq } h \cdot y = y \} \underset{y = g\cdot x}{=} \{ h \in G \text{ tq } h \cdot (g \cdot x) = g \cdot x \}$$

$$= \{ h \in G \text{ tq } \overbrace{(g^{-1} h g)}^{\in G_x} \cdot x = x \} = g G_x g^{-1}$$

$$\left. \right\} \quad \forall x \in X \text{ y } \forall g \in G \quad G_{g \cdot x} = g G_x g^{-1}$$

<u>Terminología</u>: Sea $G \curvearrowright X$ una acción. Decimos que la acción es:

a) TRANSITIVA si posee sólo 1 órbita en X, ie, para todos $x, y \in X$ existe

depende de x e y → $g \in G$ tq $y = g \cdot x$. En part, $G/G_x \xrightarrow{\sim} G \cdot x \overset{\text{Hip}}{=} X$ biyección $\forall x \in X$

↳ <u>Obs</u>: Si G finito y $G \curvearrowright X$ transitiva $\Rightarrow$ $\text{Card}(X)$ finito y divide $|G|$.

b) FIEL si $\Phi : G \hookrightarrow \text{Biy}(X)$, $g \mapsto (\Phi_g : X \to X, x \mapsto g \cdot x)$ es inyectiva,

ie, si $g \cdot x = x$ $\forall x \in X$ entonces $g = e$.

↳ <u>Obs</u>: En gral, Φ se factoriza en

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & \text{Biy}(X) \\ G/\ker(\Phi) \arrow[ur, "\exists!\, \hat{\Phi}"'] & \end{tikzcd}$$

⇝ $G/\ker(\Phi) \curvearrowright X$ acción fiel !

c) LIBRE si para todo $g \in G$, $g \cdot x = x$ para <u>algún</u> $x \in X$ entonces $g = e$,

ie, para cada $g, h \in G$ si $\exists x \in X$ tq $g \cdot x = h \cdot x \Rightarrow g = h$.

↳ <u>Obs</u>: En part, toda acción libre es fiel.

Cultura general: Las acciones libres son muy útiles en geometría diferencial/alg.