Clase 3 : Sub-grupos normales y grupos cociente

¿ Cómo producir nuevos grupos a partir de un grupo dado ?

§7. Sub-grupos normales

(Obs : característicos, distinguidos)

Muy importante !

Def : Sea G un grupo y $H \leq G$ un subgrupo. Decimos que H es un SUB-GRUPO NORMAL de G, y escribimos $H \trianglelefteq G$, si :

$H \triangleleft G$ ó $H \ntrianglelefteq G$ si además $H \neq G$

$$\text{“Para todo } g \in G \text{ y todo } h \in H \text{ , } ghg^{-1} \in H \text{”}$$

"grupo trivial"

Obs : Por definición, $H = \{e\}$ y $H = G$ siempre son subgrupos normales.

Muy importante !

Terminología : Sea G un grupo. Decimos que G es un GRUPO SIMPLE si :

1°) $G \neq \{e\}$.

2°) Si $H \trianglelefteq G$ entonces $H = \{e\}$ ó $H = G$.

Lema útil: Sea $f: G \to G'$ un morfismo de grupos, entonces $\ker(f) \trianglelefteq G$ es un sub-grupo normal.

Dem: Sea $g \in G$ y $h \in \ker(f)$ y veamos que $ghg^{-1} \in \ker(f)$, ie, $f(ghg^{-1}) = e_{G'}$. Como f es morfismo de grupos:

$$f(ghg^{-1}) = f(g)\underbrace{f(h)}_{= e_{G'} \text{ pues } h \in \ker(f)} f(g^{-1}) = f(g)\,f(g^{-1}) = f(gg^{-1}) = f(e_G) = e_{G'} \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Dar un ejemplo de un morfismo $f: G \to G'$ tal que $\mathrm{Im}(f) \leq G'$ NO sea un subgrupo normal.

[Indicación: Considerar $G' = S_3$, $G = \langle (1,2) \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y $f: G \hookrightarrow G'$ la inclusión. Verificar que $\exists\, \sigma \in S_3$ tq $(1,2)\,\sigma\,(1,2) \notin \langle (1,2) \rangle = \{e, (1,2)\}$]

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $f: G \to G'$ un morfismo de grupos y sea $H' \trianglelefteq G'$ un subgrupo normal. Probar que $f^{-1}(H') \trianglelefteq G$ es normal en G.

__Obs importante__: Sea $H \trianglelefteq G$ subgrupo normal. Entonces, los conjuntos (cocientes) de clases laterales izquierdas y derechas resp. a H __coinciden__ (ie, $G/H = H\backslash G$):

(Prop clase): "conjugar por g"

En efecto, $H \trianglelefteq G \overset{\text{def}}{\iff} \boxed{\forall g \in G \text{ y } \forall h \in H,\ ghg^{-1} \in H}$

$\overset{\text{def de } gH \text{ y } Hg}{\iff} \forall g \in G,\ gH \subseteq Hg$ (⋆)

$\iff \forall g \in G,\ Hg^{-1} \subseteq g^{-1}H$

$\overset{g \mapsto g^{-1} \text{ biyección}}{\iff} \forall g \in G,\ Hg \subseteq gH$ (⋆⋆)

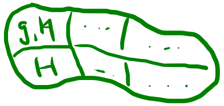
$\underset{(⋆)+(⋆⋆)}{\iff} \forall g \in G,\ gH = Hg$ ✓

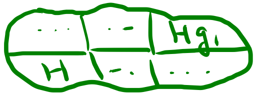
$ghg^{-1} \in H$
$\iff ghg^{-1} = \tilde{h}$ en H
$\iff gh = \tilde{h}g \in Hg$

$ghg^{-1} \in H$
$\iff ghg^{-1} = \tilde{h}$ en H
$\iff hg^{-1} = g^{-1}\tilde{h} \in g^{-1}H$

$H \leq G$,
$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H,\ g_1 = g_2 h$
$\rightsquigarrow gH$ clase lateral izq.
$\rightsquigarrow G/H$ cociente

__Conclusión__: $H \trianglelefteq G \iff \forall g \in G,\ gH = Hg \overset{\boxed{\text{Ejercicio}}}{\iff} G/H = H\backslash G$

$G/H =$ 

$=$ 

$= H\backslash G$

[Indicación: $g \in gH$ y $g \in Hg$]

Ejemplos:

① Grupos abelianos: Sea G un grupo abeliano y $H \leq G$ subgrupo $\Rightarrow H \trianglelefteq G$ es normal (y G/H es abeliano):

$\forall g \in G$ y $\forall h \in H$, $ghg^{-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Notación aditiva}}}{=} \cancel{g} + h - \cancel{g} \underset{\substack{\uparrow \\ G \text{ abeliano}}}{=} h \in H$ ✓

② Tenemos que $A_n \trianglelefteq S_n$ pues $A_n = \ker(\varepsilon)$.
En part, el grupo simétrico S_n NO es simple para $n \geq 3$.

③ Tenemos que $SL_n(k) \trianglelefteq GL_n(k)$ pues $SL_n(k) = \ker(\det)$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $H \leq G$ un subgrupo de índice $[G:H] = 2$. Probar que $H \trianglelefteq G$ es normal. } Muy útil

↳ En part, si $H \leq G$ finito y $|G|/|H| = 2 \overset{\text{Lagrange}}{=} [G:H] \Rightarrow H \trianglelefteq G$ normal

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea G un grupo y $\{H_i\}_{i\in I}$ colección arbitraria de subgrupos normales de G. Probar que $\bigcap_{i\in I} H_i \trianglelefteq G$ es normal.

§ 8. Cocientes

Sea G un grupo y $H \leq G$ un subgrupo.

¿Es posible dotar al conjunto G/H (o $H \backslash G$) de estructura de grupo?

Nos gustaría además que la proyección canónica

$$\pi : G \longrightarrow G/H \,, \quad g \longmapsto gH$$

fuese un morfismo de grupos en ese caso.

$\rightsquigarrow \pi(e) \overset{\text{dy}}{=} eH = H$ debe ser el elemento neutro de G/H (i.e., $e_{G/H} = H$)

⚠ $\underset{\uparrow \, e_{G/H}}{\pi^{-1}(H)} \overset{\text{dy}}{=} \{ g \in G \text{ tq } gH = H \} = H \rightsquigarrow H = \ker(\pi) \trianglelefteq G$ debe ser un subgrupo normal de G.

$gh_1 = h_2$
$\iff g = h_2 h_1^{-1} \in H$ ✓

↳ Condición necesaria!

Veamos que la condición $H \trianglelefteq G$ también es suficiente:

Teorema 2.1.23. — *Si H es un sub-grupo normal de G, entonces G/H puede ser dotado de una única estructura de grupo de tal suerte que la aplicación sobreyectiva $\overset{\pi}{\cancel{p}} : G \to G/H$ sea un morfismo de grupos.*

Dem: Si $\pi : G \to G/H$ morfismo, entonces en G/H se tiene que

$$\pi(g_1)\pi(g_2) = \pi(g_1 g_2) \ \forall g_1, g_2 \in G \overset{\text{def}}{\iff} (g_1 H)\cdot(g_2 H) := g_1 g_2 H \qquad (\bigstar)$$

Veamos que $(\bigstar)$ NO depende de g_1 y g_2 en sus clases laterales:

Si $g_1 = \tilde{g}_1 h_1$ y $g_2 = \tilde{g}_2 h_2 \implies g_1 g_2 = \tilde{g}_1 h_1 \tilde{g}_2 h_2 = \tilde{g}_1 \tilde{g}_2 \underbrace{(\tilde{g}_2^{-1} h_1 \tilde{g}_2)}_{\in H \text{ pues } H \trianglelefteq G!} h_2$

$\implies g_1 g_2 H = \tilde{g}_1 \tilde{g}_2 H$. Luego, $(g_1 H)\cdot(g_2 H) := g_1 g_2 H$ es la ley de grupo ∎

Sea $H \trianglelefteq G$ subgrupo normal y $\pi : G \to G/H$ proyección canónica. Entonces, las funciones

$\boxed{\text{Ejercicio}}$

$$\{\text{subgrupos de } G/H\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{subgrupos de } G \text{ que contienen } H\}$$

$$K' \longmapsto \pi^{-1}(K')$$

$$\pi(K) \longmapsfrom K$$

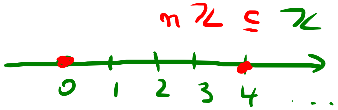
son biyecciones e inversas una de la otra. Más aún,

$$K' \trianglelefteq G/H \iff \pi^{-1}(K') \trianglelefteq G$$

Ejemplo (grupos abelianos simples): Sea $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

El grupo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es el cociente de $G = \mathbb{Z}$ por el subgrupo normal $H = n\mathbb{Z}$. Sea $\pi : \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $m \longmapsto [m]_n$ proyección canónica.

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} \{\text{Subgrupos de } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{\text{Subgrupos de } \mathbb{Z} \text{ que contienen } n\mathbb{Z}\} \\ & & \| \\ \langle [d]_n \rangle & \longleftarrow\!\shortmid & \{ d\mathbb{Z},\ \text{con } d \mid n \} \end{array}$$



En part, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es simple $\Longleftrightarrow$ n es un número primo.

Recuerdo / Eslogan: (cf. Teoría de Categorías)

Una propiedad universal es una característica / cualidad que permite caracterizar un objeto matemático: si otro objeto la verifica entonces ellos se relacionan de algún modo (preciso según el contexto).

del cociente

Teorema 2.1.25 (Propiedad universal). — *Sea G un grupo, sea $H \trianglelefteq G$ un sub-grupo normal y sea $f : G \to G'$ un morfismo de grupos. Si $H \subseteq \ker(f)$, entonces existe un único morfismo $\widehat{f} : G/H \to G'$ tal que $f = \widehat{f} \circ p$, es decir, tal que el diagrama siguiente es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & G' \\ G/H \arrow[ur, dashed, "\exists!\widehat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Además, $\ker(\widehat{f}) = \ker(f)/H$ *y* $\mathrm{Im}(\widehat{f}) = \mathrm{Im}(f)$.

Obs: $H \leq \ker(f)$ automáticamente (pues ambos son subgrupos de G)

$f(g) = \hat{f}(gH)$ $\forall g \in G$.

Dem: El hecho que el diagrama sea conmutativo significa que $\forall g \in G$, $f(g) = \hat{f}(gH)$ (sup. que $\hat{f}$ ya fue construido!). Definimos $\forall g \in G$, $\hat{f}(gH) := f(g)$ $\rightsquigarrow$ Bien def si $f(gh) = \cancel{f(g)}$ $\forall h \in H$

$= \cancel{f(g)} f(h)$

$\iff f(h) = e_{G'} \iff h \in \ker(f) \iff H \leq \ker(f)$.

Se verifica que $\ker(\hat{f}) = \ker(f)/H$ y que $\mathrm{Im}(\hat{f}) = \mathrm{Im}(f)$ ∎

Corolario (Teorema del Isomorfismo de Noether):
Sea $f: G \to G'$ un morfismo de grupos, entonces
$$\hat{f}: G/\ker(f) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im}(f)$$
es un isomorfismo

Dem: Aplicar lo anterior a $f: G \twoheadrightarrow \operatorname{Im}(f)$, $g \mapsto f(g)$
y $H := \ker(\hat{f}) = \ker(f) \Rightarrow \exists!\ \hat{f}: G/\ker(f) \twoheadrightarrow \operatorname{Im}(f)$ sobreyectivo
con $\ker(\hat{f}) = \ker(f)/\ker(f) = e_{G/\ker(f)}$, i.e., $\hat{f}$ inyectivo ✓ ∎

Corolario 2.1.27. — *El sub-grupo $\langle g \rangle$ generado por un elemento g de un grupo G es isomorfo a $\mathbb{Z}$ si es infinito, o bien a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ con $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ si es finito. El entero n es llamado el* **orden** *del elemento g, y es denotado* $\operatorname{ord}(g)$.

Dem: Si definimos $\Phi_g: \mathbb{Z} \to G$, $n \mapsto g^n$ $\Rightarrow \operatorname{Im}(\Phi_g) \overset{\text{def}}{=} \langle g \rangle$
Si Φ_g inyectivo (i.e., $\ker(\Phi_g) = \{0\}$) $\overset{\text{Noether}}{\Longrightarrow} \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \langle g \rangle$ vía $\hat{\Phi}_g$ ✓
Si no: $\ker(\Phi_g) = n\mathbb{Z}$, cierto $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ $\underset{\text{Noether}}{\Longrightarrow} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \langle g \rangle$ vía $\hat{\Phi}_g$ ∎