Parte I : Teoría de Grupos y Representaciones

Clase 1 : Primeras definiciones y Ejemplos

§3. Definiciones básicas

Definición 2.1.1. — Un **grupo** es un conjunto no vacío G dotado de una ley de composición interna

$$G \times G \longrightarrow G$$
$$(g_1, g_2) \longmapsto g_1 g_2$$

que satisface las siguientes condiciones:

1. **asociatividad:** para todos $g_1, g_2, g_3 \in G$ tenemos que
$$(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3);$$
2. **elemento neutro:** existe un elemento $e \in G$ (necesariamente único) tal que para todo $g \in G$ tenemos que
$$ge = eg = g;$$
3. **inverso:** para todo $g \in G$ existe un elemento $g^{-1} \in G$ (necesariamente único) tal que
$$gg^{-1} = g^{-1}g = e.$$

Cultura general (no lo usaremos en MAT214)

semi-grupo

monoide

hay más notaciones! (Id, 0, 1, etc)

Idea : e, e' neutros

$\Rightarrow e \cdot e' = e$ ✓

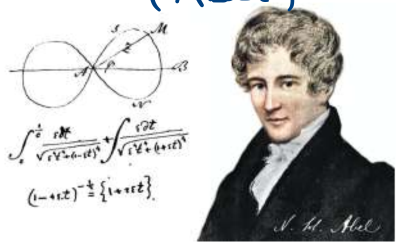
$\quad\;\; \overset{\shortparallel}{e'}$

Notación: Sea $g \in G$ y $n \in \mathbb{Z}$ $\rightsquigarrow$ $g^n := \begin{cases} \overbrace{g \cdots g}^{n \text{ veces}} & \text{si } n > 0 \\ e & \text{si } n = 0 \\ \underbrace{g^{-1} \cdots g^{-1}}_{(-n)-\text{veces}} & \text{si } n < 0 \end{cases}$

En part, $g^{m+n} = g^m \cdot g^n \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$

Def: Sea G un grupo. Decimos que G es ABELIANO (o conmutativo) si $g_1 g_2 = g_2 g_1 \quad \forall g_1, g_2 \in G$.

(Abel)



↳ **Convención:** En tal caso, escribimos $g_1 \cdot g_2 =: g_1 + g_2$
(hay excepciones)
$e =: 0$ y $g^{-1} =: -g$ (opuesto) $\rightsquigarrow$ "Notación aditiva"

***Definición 2.1.3* (anillo y cuerpo).** — Sea $(A, +, \cdot)$ un conjunto no-vacío con dos leyes de composición interna. Se dice que A es un **anillo** si:

1. $(A, +)$ es un grupo abeliano.
2. $(A, \cdot)$ es un monoide.
3. Para todos $a, b, c \in A$ se tiene que $a(b+c) = ab + ac$ y $(b+c)a = ba + ca$. (distributividad)

Además, se dice que A es un **anillo abeliano** si $ab = ba$ para todos $a, b \in A$. Finalmente, diremos que un anillo abeliano k es un **cuerpo** si $k \neq \{0\}$ y si $(k \setminus \{0\}, \cdot)$ es un grupo. (todo elemento $\neq 0$ posee inverso mult).

Parte II de MAT214
(cf. cuerpo torcido "skew field")

Ejercicio Sea G un grupo tq $g^2 = e \ \forall g \in G$.
Probar que G es abeliano. ¿El recíproco es cierto?

Terminología: Sea G un grupo. Decimos que G es FINITO si el conjunto (subyacente a) G es finito.
$\rightsquigarrow$ $|G| :=$ cardinal de G. es llamado el ORDEN de G.

Veamos algunos ejemplos de grupos:

Si G y G' son grupos, entonces $G \times G'$ puede ser dotado de estructura de grupo mediante: $\hookrightarrow$ PRODUCTO DIRECTO

$$(g_1, g_1') \cdot (g_2, g_2') := (\underbrace{g_1 g_2}_{\text{en } G}, \underbrace{g_1' g_2'}_{\text{en } G'})$$

Ejemplos

① Enteros: $(\mathbb{Z}, +)$ forma un grupo abeliano (infinito).
$(\mathbb{Z}, \cdot)$ no son un grupo, $(\mathbb{Z}\setminus\{0\}, \cdot)$ tampoco (eg. $2^{-1} \notin \mathbb{Z}$)

② Cuerpos: Si k es un cuerpo (eg. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ o $\mathbb{F}_p$) entonces $(k, +)$ y $(k\setminus\{0\}, \cdot)$ son grupos abelianos

③ Anillos abelianos: Sea A un anillo abeliano, entonces $(A,+)$ es un grupo abeliano.

Def/Notación: $A^\times := \{a \in A \text{ tq } \exists b \in A \text{ que cumple } \underset{\text{mult. en } A}{ab} = 1\}$

↳ UNIDADES DE A

$\Rightarrow (A^\times, \cdot)$ es un grupo abeliano. ⚠ Si $A = k$ cuerpo, $k^\times = k \setminus \{0\}$. por definición!

↳ siempre que $A \neq \{0\}$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $\mathbb{Z}^\times = \{-1, 1\}$.

④ Def/Ejemplo: Sea $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, entonces $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ donde

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{ \underset{e}{[0]_n}, [1]_n, \ldots, [n-1]_n \} \quad \text{“enteros módulo } n\text{”}$$

es un grupo abeliano finito de orden n. → $[a]_n + [b]_n := [a+b]_n$

↳ Lo llamaremos GRUPO CÍCLICO DE ORDEN n, y escribiremos simplemente $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en lugar de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

⑤ **Biyecciones:** Sea X un conjunto $\neq \emptyset$

$\rightsquigarrow \mathrm{Biy}(X) = \{ f : X \to X \text{ biyectiva} \} \leftarrow$ grupo con la comp. de funciones

$\mathfrak{S}_n$ $\{$ LaTeX

Caso particular importante: $X = \{1, 2, \dots, n\} \rightsquigarrow \mathrm{Biy}(\{1, \dots, n\}) =: S_n$

GRUPO SIMÉTRICO de orden $n!$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que S_n NO es abeliano si $n \geq 3$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ a) Describir todos los elementos de S_4

b) Calcular la "tabla de multiplicación" de S_3

6 Matrices invertibles sobre un cuerpo: Sea k un cuerpo

$$GL_n(k) := \{ M \in M_{n\times n}(k) \text{ invertible} \}$$

GRUPO GENERAL LINEAL → no abeliano si $n \geq 2$

Más generalmente, si V es un k-ev (de dimensión arbitraria)

$$GL(V) := \{ \varphi : V \xrightarrow{\sim} V \text{ isomorfismo lineal} \}$$

Obs: Si $V \cong k^n \rightsquigarrow GL(V) \cong GL_n(k)$ (escoger una base).

Más generalmente, definimos el GRUPO GENERAL AFÍN

$$GA(V) := \{ \varphi : V \xrightarrow{\text{biy}} V,\ x \longmapsto \varphi(x) = u(x) + b, \text{ con } u \in GL(V), b \in V \}$$

↪ "aplicación afín"

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Si $\varphi(x) = u(x) + b \in GA(V)$, calcular $\varphi^{-1} \in GA(V)$

⑦ Matrices invertibles sobre un anillo abeliano:

Sea A un anillo abeliano $\neq \{0\}$, y $M_{n\times n}(A)$ el anillo de matrices $n\times n$ con coeficientes en A. Definimos

$\exists M^{-1} \in M_{n\times n}(A)$ tq $MM^{-1} = M^{-1}M = I_n$

$$GL_n(A) := \{ M \in M_{n\times n}(A) \text{ tq } M \text{ es invertible} \}.$$

Lema útil: $GL_n(A) = \{ M \in M_{n\times n}(A) \text{ tq } \det(M) \in A^\times \}$

Dem: Si $M \in M_{n\times n}(A)$ es invertible, i.e., $\exists M^{-1} \in M_{n\times n}(A)$ tq $MM^{-1} = I_n \Rightarrow \det(M)\det(M^{-1}) = 1$ en $A \Rightarrow \det(M) \in A^\times$ ✓

Si $\det(M) \in A^\times$, como $M \cdot {}^t\mathrm{com}(M) = \det(M) I_n \rightsquigarrow M^{-1} = (\det M)^{-1}\, {}^t\mathrm{com}(M)$ es la inversa de M (con coeficientes en A !) ✓ ∎

Eg. Si $A = k$ cuerpo, $k^\times = k\setminus\{0\} \rightsquigarrow \det(M) \in k^\times \iff \det(M) \neq 0$.

Eg. $GL_n(\mathbb{Z}) = \{ M \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}) \text{ tq } \det(M) = \pm 1 \}$

§ 4. Sub-grupos y generadores

Def: Sea G un grupo. Un subconjunto $H \subseteq G$ es llamado un **SUB-GRUPO**, y escribimos $H \leq G$, si:

1°) $e \in H$,

2°) $h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 h_2 \in H$ para todos $h_1, h_2 \in H$

3°) $h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$ para todo $h \in H$

$H < G$ ó $H \lneq G$ si además $H \neq G$

Es decir, "la ley de composición interna de G se restringe a H, dotándolo de estructura de grupo".

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea G un grupo y $\{H_i\}_{i \in I}$ una colección arbitraria de subgrupos de G. Probar que

$$\bigcap_{i \in I} H_i \subseteq G$$

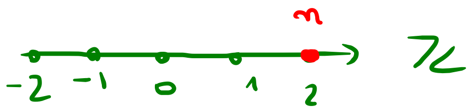
es un subgrupo de G.

Ejemplos

① **Enteros**: Los subgrupos de $\mathbb{Z}$ son <u>todos</u> de la forma $n\mathbb{Z}$ para un único $n \in \mathbb{N}$.

En efecto: Sea $H \leq \mathbb{Z}$ subgrupo. Si $H \neq \{0\}$, definimos

$$n = n(H) := \min\{H \cap \mathbb{N}^{\geq 1}\}$$



Si $m \in H$ elemento arbitrario, entonces la división euclideana implica que $m = qn + r$, con $0 \leq r < n$ $\underset{H \leq \mathbb{Z}}{\Longrightarrow}$ $r \in H$ y luego $r = 0$

n minimal

$$\Rightarrow H = n\mathbb{Z} \overset{\text{def}}{=} \{kn,\ k \in \mathbb{Z}\}$$ múltiplos de n. ∎

② Grupo ortogonal (cf. MAT210)

$$O_n(\mathbb{R}) := \{ M \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \text{ tq } M\,{}^tM = I_n \}$$

↳ Matrices que preservan $\langle \cdot , \cdot \rangle$ ($\Leftrightarrow \|\cdot\|_{eucl}$) de $\mathbb{R}^n$

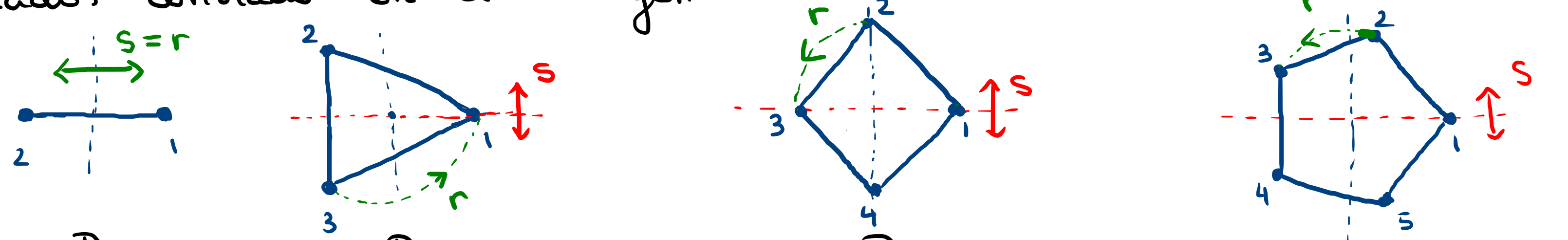
es un subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$.

(Similar: $U_n(\mathbb{C}) \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ grupo unitario)

③ GRUPO DIEDRAL:

⚠ En algunos textos D_{2n}

Sea $n \geq 2$ un entero. El grupo diedral D_n es el subgrupo de $O_2(\mathbb{R})$ de matrices que preservan los vértices de un polígono regular de n lados centrado en el origen:



D_2 D_3 D_4 D_5 etc

Sea r la rotación en $\frac{2\pi}{n}$ y s la simetría resp. a la recta pasando por el origen y un vértice $\Longrightarrow D_n = \{ e = I_2, r, \dots, r^{n-1}, s, rs, \dots, r^{n-1}s \}$ con $rsrs = e \rightsquigarrow |D_n| = 2n$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ (Indicación: Considerar potencias de r, $r^i s$ y $s r^i$)