Ayudantía 10

Módulos desde Álgebra Lineal

MAT214 - USM

Ayudante: Cristóbal Montecino
Profesor: Pedro Montero

5 Julio 2021

Recuerdo Álgebra lineal

Subespacio generado

Subespacio generado

Sea V un k-espacio vectorial. El **subespacio generado** por $S \subseteq V$, denotado por $\langle S \rangle$, es el subespacio más pequeño que contiene a S

Subespacio generado

Sea V un k-espacio vectorial. El **subespacio generado** por $S \subseteq V$, denotado por $\langle S \rangle$, es el subespacio más pequeño que contiene a S:

$$\langle S \rangle \subseteq W \qquad \forall S \subseteq W \leq V$$

1.

2.

Subespacio generado

Sea V un k-espacio vectorial. El **subespacio generado** por $S \subseteq V$, denotado por $\langle S \rangle$, es el subespacio más pequeño que contiene a S:

$$\langle S \rangle \subseteq W \qquad \forall S \subseteq W \leq V$$

1. Siempre existe y es
$$\langle S \rangle := \bigcap_{\substack{S \subseteq W \\ W \leq V}} W$$

2.

Subespacio generado

Sea V un k-espacio vectorial. El **subespacio generado** por $S \subseteq V$, denotado por $\langle S \rangle$, es el subespacio más pequeño que contiene a S:

$$\langle S \rangle \subseteq W \qquad \forall S \subseteq W \leq V$$

1. Siempre existe y es
$$\langle S \rangle := \bigcap_{\substack{S \subseteq W \\ W \leq V}} W$$

2. Tenemos la siguiente caracterización:
Son todas las combinaciónes lineales posibles usando elementos de S
$$\langle S \rangle = \mathrm{Lin}(S) = \left\{ \sum_{\text{finita}} a_i s_i \mid s_i \in S, a_i \in k \right\}$$

Bases

Bases

Sea V un espacio vectorial. B es una **base** cuando contiene lo justo para generar el espacio

Bases

Sea V un espacio vectorial. B es una **base** cuando contiene lo justo para generar el espacio:

$$S \subseteq B \wedge V = \langle S \rangle \implies S = B$$

Bases

Sea V un espacio vectorial. B es una **base** cuando contiene lo justo para generar el espacio:

$$S \subseteq B \wedge V = \langle S \rangle \implies S = B$$

Podemos separar la definición en dos:

1.
2.

Bases

Sea V un espacio vectorial. B es una **base** cuando contiene lo justo para generar el espacio:

$$S \subseteq B \wedge V = \langle S \rangle \implies S = B$$

Podemos separar la definición en dos:

1. Generador
$$\langle B \rangle = V$$
2.

Bases

Sea V un espacio vectorial. B es una **base** cuando contiene lo justo para generar el espacio:

$$S \subseteq B \wedge V = \langle S \rangle \implies S = B$$

Podemos separar la definición en dos:

1. Generador
$$\langle B \rangle = V$$
2. Contiene lo justo:
$$S \subseteq B \wedge \langle S \rangle = \langle B \rangle \implies S = B$$

Bases

Sea V un espacio vectorial. B es una **base** cuando contiene lo justo para generar el espacio:

$$S \subseteq B \wedge V = \langle S \rangle \implies S = B$$

Podemos separar la definición en dos:

1. Generador

$$\langle B \rangle = V$$

2. Contiene lo justo:

$$S \subseteq B \wedge \langle S \rangle = \langle B \rangle \implies S = B$$

(Esta propiedad es equivalente a ser linealmente independiente)

La base, en dimensión finita, es lo único que importa

La base es lo único que importa

La base es lo único que importa?

La base es lo único que importa?

¿Por qué?

Suma directa

Un espacio vectorial V **es suma directa** de una familia $\{W_i\}_{i\in I}$ de espacios vectoriales cuando

1.
2.

Un espacio vectorial V **es suma directa** de una familia $\{W_i\}_{i\in I}$ de espacios vectoriales cuando

1. Existen dos familias de transformaciones lineales $\{\iota_i : W_i \to V\}_{i\to I}$ y $\{\pi_i : V \to W_i\}$.

   Estas se comportan como inyecciones y proyecciones ortogonales

2.

Un espacio vectorial V **es suma directa** de una familia $\{W_i\}_{i\in I}$ de espacios vectoriales cuando

1. Existen dos familias de transformaciones lineales $\{\iota_i : W_i \to V\}_{i\to I}$ y $\{\pi_i : V \to W_i\}$.

   Estas se comportan como inyecciones y proyecciones ortogonales:

   Para $j = i$, se comportan como identidad:

$$\pi_i(\iota_i(x)) = x$$

2.

Un espacio vectorial V **es suma directa** de una familia $\{W_i\}_{i\in I}$ de espacios vectoriales cuando

1. Existen dos familias de transformaciones lineales $\{\iota_i : W_i \to V\}_{i\to I}$ y $\{\pi_i : V \to W_i\}$.

   Estas se comportan como inyecciones y proyecciones ortogonales:

   Para $j = i$, se comportan como identidad:

   $$\pi_i(\iota_i(x)) = x$$

   Para $j \neq i$, se comportan como 0:

   $$\pi_j(\iota_i(x)) = 0$$

2.

Un espacio vectorial V **es suma directa** de una familia $\{W_i\}_{i\in I}$ de espacios vectoriales cuando

1. Existen dos familias de transformaciones lineales $\{\iota_i : W_i \to V\}_{i\to I}$ y $\{\pi_i : V \to W_i\}$.

   Estas se comportan como inyecciones y proyecciones ortogonales:

   Para $j = i$, se comportan como identidad:

$$\pi_i(\iota_i(x)) = x$$

   Para $j \neq i$, se comportan como 0:

$$\pi_j(\iota_i(x)) = 0$$

2. V contiene lo justo para que se cumpla lo anterior.

Ejemplo

$$\pi_\alpha(\iota_\alpha(a) + \iota_\beta(b)) =$$

Ejemplo

$$\pi_\alpha(\iota_\alpha(a) + \iota_\beta(b)) = \pi_\alpha(\iota_\alpha(a)) + \pi_\alpha(\iota_\beta(b))$$

Ejemplo

$$\pi_\alpha(\iota_\alpha(a) + \iota_\beta(b)) = \cancel{\pi_\alpha}(\cancel{\iota_\alpha}(a)) + \cancel{\pi_\alpha(\iota_\beta(b))}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned}\pi_\alpha(\iota_\alpha(a)+\iota_\beta(b)) &= \cancel{\pi_\alpha}(\cancel{\iota_\alpha}(a)) + \cancel{\pi_\alpha(\iota_\beta(b))}\\ &= a+0\end{aligned}$$

Sea

$$w = \sum_{\text{finita}} \iota_i(\pi_i(v))$$

Pruebe que

$$\sum_{\text{finita}} \iota_i(\pi_i(w)) = w$$

1. Para cualquier familia $\{W_i\}_{i\in I}$, existe la suma directa y es única salvo isomorfismos (sin importar ι_i, π_i).
2.

Suma directa

1. Para cualquier familia $\{W_i\}_{i\in I}$, existe la suma directa y es única salvo isomorfismos (sin importar ι_i, π_i).
2. Como es única salvo isomorfismos, basta definir una

1. Para cualquier familia $\{W_i\}_{i\in I}$, existe la suma directa y es única salvo isomorfismos (sin importar ι_i, π_i).
2. Como es única salvo isomorfismos, basta definir una:

$$\bigoplus_{i\in I} W_i := \left\{(w_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} W_i \mid w_i = 0 \text{ excepto finitos terminos}\right\}$$

1. Para cualquier familia $\{W_i\}_{i\in I}$, existe la suma directa y es única salvo isomorfismos (sin importar ι_i, π_i).
2. Como es única salvo isomorfismos, basta definir una:

$$\bigoplus_{i\in I} W_i := \left\{ (w_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} W_i \mid w_i = 0 \text{ excepto finitos terminos} \right\}$$

Entonces, V es suma directa de $\{W_i\}_{i\in I}$ si y solo si

$$V \cong \bigoplus_{i\in I} W_i$$

Suma directa interna y externa

Es una suma directa **interna** si la familia consiste en subespacios y el isomorfismo es

$$(w_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} w_i$$

En otro caso, es **externa**.

¿Cómo esto explica la utilidad de las bases?

Propiedad universal de la suma directa

Sean $T_i : W_i \to X$ transformaciones lineales.

Propiedad universal de la suma directa

Sean $T_i : W_i \to X$ transformaciones lineales. Estas se pueden pegar de manera única y crear una transformación lineal:

$$T : \bigoplus_{i \in I} W_i \to X$$

Propiedad universal de la suma directa

Sean $T_i : W_i \to X$ transformaciones lineales. Estas se pueden pegar de manera única y crear una transformación lineal:

$$T : \bigoplus_{i \in I} W_i \to X$$

de manera que $T|_{W_i} = W_i$.

¡Son las únicas que hay!

Propiedad universal de la suma directa

Sean $T_i : W_i \to X$ transformaciones lineales. Estas se pueden pegar de manera única y crear una transformación lineal:

$$T : \bigoplus_{i \in I} W_i \to X$$

de manera que $T|_{W_i} = W_i$.

¡Son las únicas que hay!

Toda transformación lineal de $\bigoplus_{i \in I} W_i$ es el pegado de transformaciones lineales $T_i : W_i \to X$.

Propiedad universal de la suma directa

Sean $T_i : W_i \to X$ transformaciones lineales. Estas se pueden pegar de manera única y crear una transformación lineal:

$$T : \bigoplus_{i \in I} W_i \to X$$

de manera que $T|_{W_i} = W_i$.

¡Son las únicas que hay!

Toda transformación lineal de $\bigoplus_{i \in I} W_i$ es el pegado de transformaciones lineales $T_i : W_i \to X$.

Es decir, toda transformación lineal en la suma directa se puede factorizar y **lo único que importa es saber que pasa en los T_i.**

Bases como sumas directas

Sea B una base.

Bases como sumas directas

Sea B una base.

$$V = \bigoplus_{b \in B} \langle b \rangle$$

Sea B una base.

$$V = \bigoplus_{b \in B} \langle b \rangle$$

Por lo tanto, **lo único que importa es saber que pasa en cada $b \in B$.**

Bases como sumas directas

B es base si y solo si

$$V = \bigoplus_{b \in B} \langle b \rangle$$

Por lo tanto, **lo único que importa es saber que pasa en cada $b \in B$.**

B es base si y solo si

$$V = \bigoplus_{b \in B} \langle b \rangle$$

Por lo tanto, **lo único que importa es saber que pasa en cada $b \in B$.**

pues

$$V = \bigoplus_{b \in B} \langle b \rangle = \bigoplus_{b \in B} kb \cong \bigoplus_{b \in B} k = k^{(B)}$$

Como es suma directa interna, B es base si y solo si $f : \bigoplus_{b\in B}\langle b\rangle \to V$ definido por

$$(a_b b)_{b\in B} \to \sum_{b\in B} a_b b$$

es un isomorfismo.

Como es suma directa interna, B es base si y solo si $f : \bigoplus_{b \in B} k \to V$ definido por

$$(a_b)_{b \in B} \to \sum_{b \in B} a_b b$$

es un isomorfismo.

Como es suma directa interna, B es base si y solo si $f : k^{(B)} \to V$ definido por

$$(a_b)_{b \in B} \to \sum_{b \in B} a_b b$$

es un isomorfismo.

Como es suma directa interna, B es base si y solo si $f : k^{(B)} \to V$ definido por

$$(a_b)_{b \in B} \to \sum_{b \in B} a_b b$$

es un isomorfismo.

Podemos trasladar todo a este nuevo contexto:

1. Es generadora cuando es morfismo sobreyectivo.
2. Es linealmente independiente (libre) cuando es morfismo inyectivo.
3. Es base cuando es isomorfismo.

TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN EN DIMENSIÓN FINITA

Lemme des Noyaux

Sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Si tenemos un polinomio factorizado en dos, o más, polinomios sin factores, no constantes, en común, entre sí,

$$p(x) = p_1(x)p_2(x)$$

Entonces,

$$\ker p(T) = \ker p_1(T) \oplus \ker p_2(T)$$

Teorema de Cayley-Hamilton

En un espacio V de dimensión finita, sea $T : V \to V$ una transformación lineal y $p(x)$ el polinomio característico. Entonces,

$$p(T) = 0$$

Es decir, $\ker p(T) = V$.

Teorema de descomposición

Sea $T : V \to V$ una transformación lineal y

$$p(x) = cte \cdot p_1^{\alpha_1}(x) \cdots p_r^{\alpha_r}(x)$$

el polinomio característico factorizado en factores lineales: $p_i(x) = (x - \lambda_i)$. Entonces,

$$\ker p_1^{\alpha_1}(T) \oplus \cdots \oplus \ker p_r^{\alpha_r}(T) = V$$

donde V es de dimensión finita.

Módulos

Idea

Un módulo es un espacio vectorial, solo que en vez de ocupar un cuerpo k, se ocupa un anillo A.

Idea

Un módulo es un espacio vectorial, solo que en vez de ocupar un cuerpo k, se ocupa un anillo A.

Un k-espacio vectorial es un k-módulo.

¿Qué hay de distinto?

¿Qué hay de distinto?
¡Los ideales!

Un cuerpo k visto como un k-espacio vectorial, no tiene subespacios no triviales.

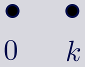
Los subespacios son

$$\{0, k\}$$

Los subespacios son

$$\{0, k\}$$

Geométricamente:



Sin embargo, un anillo A visto como A-módulo, tiene a los ideales como submódulos.

Consideremos $M = \mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo.

Consideremos $M = \mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo.

Geométricamente:

Consideremos $M = \mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo.

Geométricamente:

Consideremos el ideal $2\mathbb{Z}$, este es un submódulo.

Consideremos $M = \mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo.

Geométricamente:

Consideremos el ideal $2\mathbb{Z}$, este es un submódulo.
Geométricamente:

Consideremos $M = \mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo.

Geométricamente:

Consideremos el ideal $2\mathbb{Z}$, este es un submódulo.
Geométricamente:

$3\mathbb{Z}$ geométricamente:

Consideremos $M = \mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo.

Geométricamente:

Consideremos el ideal $2\mathbb{Z}$, este es un submódulo.
Geométricamente:

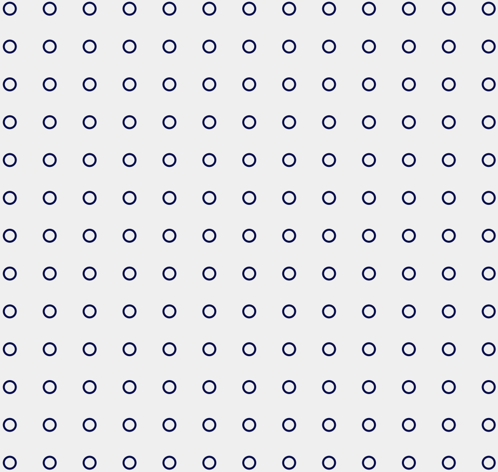
$3\mathbb{Z}$ geométricamente:

$4\mathbb{Z}$ geométricamente:

Consideremos $M = \mathbb{Z}^2$ como $\mathbb{Z}$-módulo.

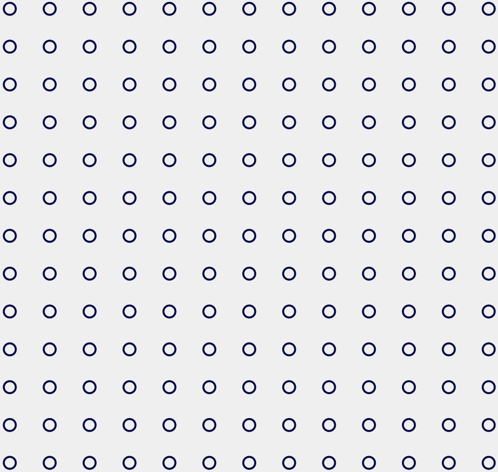
Consideremos $M = \mathbb{Z}^2$ como $\mathbb{Z}$-módulo.

Geométricamente:



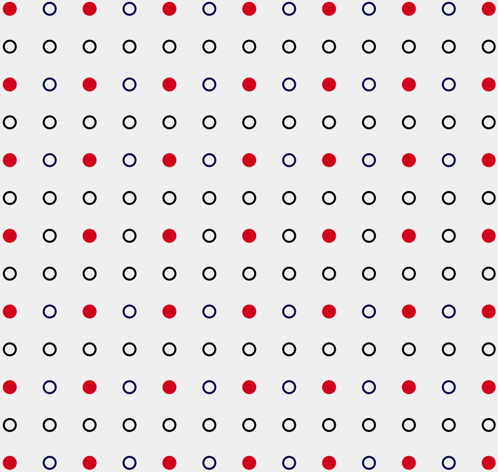
Consideremos $M = \mathbb{Z}^2$ como $\mathbb{Z}$-módulo.

Consideremos el ideal $I = 2\mathbb{Z}$ y el submódulo IM submódulo. Geométricamente:

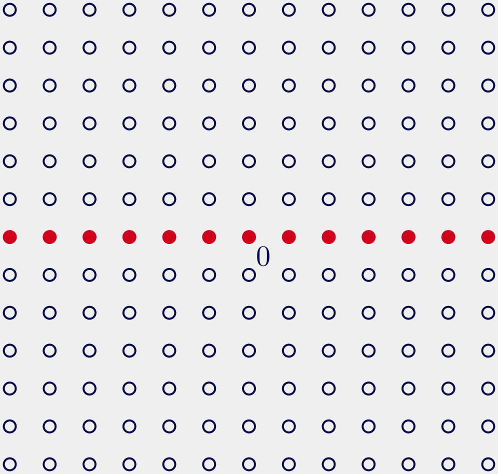


Consideremos $M = \mathbb{Z}^2$ como $\mathbb{Z}$-módulo.

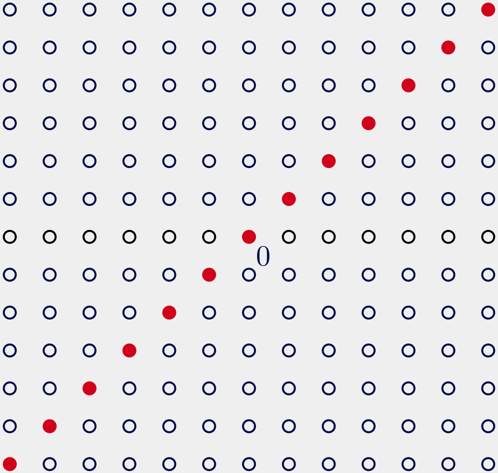
Consideremos el ideal $I = 2\mathbb{Z}$ y el submódulo IM submódulo.
Geométricamente:



Consideremos $M = \mathbb{Z}^2$ como $\mathbb{Z}$-módulo.
Tenemos como submódulo a $\mathbb{Z}$, geométricamente:

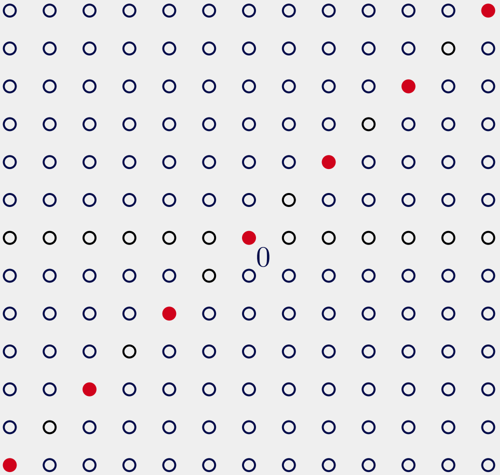


Consideremos $M = \mathbb{Z}^2$ como $\mathbb{Z}$-módulo.
Tenemos como submódulo a $\langle (1,1) \rangle$, geométricamente:



¡Gracias a los ideales tenemos submódulos más exóticos!

Consideremos $M = \mathbb{Z}^2$ como $\mathbb{Z}$-módulo.
Tenemos como submódulo a $\langle(1,1)\rangle \cap 2\mathbb{Z}M$, geométricamente:



¿Que perdemos?

¿Que perdemos?
Las bases son más que lo justo para generar.

Un conjunto que tiene **lo justo para generar no necesariamente es linealmente independiente**, es decir, no necesariamente tiene una única escritura como combinación lineal.

Un conjunto que tiene **lo justo para generar no necesariamente es linealmente independiente**, es decir, no necesariamente tiene una única escritura como combinación lineal.

Por ejemplo, $M = A = \mathbb{R}[x, y]$ como A-módulo.

$\{x, y\}$ tiene lo justo para generar, pero $\{x, y\}$ es linealmente dependiente: $ax + by = 0$ tiene solución no trivial con $a = y, b = -x$.

Por lo tanto, no necesariamente existe base, incluso cuando es finitamente generado. En caso que exista, diremos que el módulo es **libre**.

Sin embargo, ¡la mayoría de resultados en dimensión finita solo requieren tener una cantidad finita de generadores!

(i.e. **módulo finitamente generado**)

Ya que podemos considerar anillos con ideales no triviales. Para empezar de a poco, podemos considerar anillos con un ideal no trivial:

(i.e. **anillos locales**)

$$0 \qquad \mathfrak{m} \qquad A$$

Pero eso será,

Pero eso será, para una próxima ayudantía.