Ayudantía 9

1. Sean A y B son anillos isomorfos y sea I un ideal de A e I' el ideal correspondiente a I en B.

a) Pruebe que I es primo si y solo si I' es primo.

b) Pruebe que I es radical si y solo si I' es radical.

2. Sea $\varphi : A \to B$ un morfismo sobreyectivo de anillos. Pruebe que si I es un ideal de A, entonces $\varphi(I)$ es un ideal en B.

3. Sea I y J ideales de un anillo A. Pruebe que

$$A/\langle I \cup J \rangle \cong (A/I)/\pi(J)$$

donde π es la proyección a A/I.

4. Pruebe que

$$\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]/\langle x_n - a \rangle \cong \mathbb{C}[x_1, ..., x_{n-1}]$$

con $a \in \mathbb{C}$.

5. Pruebe que

$$\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]/\langle x_1 - a_1, ..., x_n - a_n \rangle \cong \mathbb{C}$$

con $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$.

6. Pruebe que si J un ideal de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ tal que $X \subseteq V(J)$, entonces $J \subseteq \mathcal{I}(X)$.
Es decir, $\mathcal{I}(X)$ es el ideal más grande que anula a X.

Con ello, pruebe que $V(\mathcal{I}(X))$ es el cerrado de Zariski más pequeño que contiene a X.

7. Sea $X = \{(2,3)\} \subseteq \mathbb{A}^2$. Encuentre $\mathcal{I}(X)$. Pruebe que $V(\mathcal{I}(X)) = X$. Concluya que X es cerrado.

8. Pruebe que si $X_i \subseteq \mathbb{A}^n$ para todo $i \in I$ con I un conjunto de indices, entonces

$$\mathcal{I}\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) = \bigcap_{i\in I} \mathcal{I}(X_i)$$

9. Pruebe que si $X \subseteq \mathbb{A}^2$, entonces

$$\mathcal{I}(X) = \bigcap_{(a,b)\in X} \langle x-a, y-b\rangle$$

10. Sea $X = \{(1,0),(2,0)\} \subseteq \mathbb{A}^2$. Pruebe que X es cerrado. Grafique algunos elementos de $\mathcal{I}(X)$.