Ayudantía 7

P1. Sea I, J ideales de un anillo.

a) Probar que $I + J$ y IJ son ideales.
b) Probar que $I + J = \langle I \cup J \rangle$

P2. Sea $\mathbb{C}[x]$ nuestro anillo. Pruebe que $\langle p(x) \rangle = \left\{ p(x)q(x) \mid q(x) \in \mathbb{C}[x] \right\}$.

P3. Encuentre todos los ideales maximales de $\mathbb{C}[x]$ y de $\mathbb{R}[x]$.

P4. Pruebe que $\mathbb{C}[x]/\mathfrak{m} \cong \ \mathbb{C}$ para todo ideal maximal de $\mathbb{C}$. Muestre esto no ocurre con $\mathbb{R}$.

P5. Sea el anillo de las funciónes continuas $A = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Pruebe que

$$I := \left\{ o \in A \mid \lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0 \right\}$$

a) Pruebe que I es un ideal.

b) Calcule $(x_0 + h)^2 - x_0^2$ en A/I.

c) Calcule $\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)$ en A/I. Note que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h) - h}{h} = 0$$

P6. Considere $\mathbb{R}$ como un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Considere el subespacio

$$\langle 1, \sqrt{2} \rangle$$

Pruebe que es subanillo de $\mathbb{R}$ y una $\mathbb{Q}$-álgebra.

P7. Vea que

$$\sqrt{\langle (x-1)^2 \rangle} = \langle (x-1) \rangle$$

en $\mathbb{Q}[x]$