Ayudantía 4

Ejercicio 1.

> $\underline{\text{Teoremas de Sylow + Corolarios}}$
>
> Si p es un primo que divide al orden de un grupo G. Entonces:
>
> 1.
>
> > Existe algún p-subgrupo grupo de Sylow P, es decir, existe $P \leq G$ tal que $|P| = p^\alpha$ con p^α la potencia de p más grande que divide al |G|.
>
> 1.1. Otro resultado, más general (Aprenderse este):
>
> > Sea p^β una potencia de p tal que divide a $|G|$ entonces existe un subgrupo con orden p^β.
> >
> > Los grupos con orden una potencia de p se llaman p-subgrupos.
> >
> > Si el orden es la potencia más grande que divide a $|G|$, se llaman p-subgrupos de Sylow.
>
> 1.2.
>
> > Todo subgrupo con orden alguna potencia de p esta contenido en algun p-subgrupo de Sylow.
>
> 2.
>
> > Todos los p-subgrupos de Sylow son conjugados.
>
> 3.
>
> > La cantidad de p-subgrupos de sylow n_p cumple con que
> >
> > $$n_p \equiv 1 \pmod p \qquad n_p \text{ divide a } |G|/p^\alpha \qquad n_p = [G : N_G(P)]$$
>
> Consecuencia: $n_p = 1$ si y solo si el p-subgrupo de sylow es normal.

Recuerdos:

> En la ayudantía pasada, usamos Sylow para probar que los grupos de orden 6 son de la forma:
>
> $$\{e, x, y, y^2, xy, xy^2\}$$
>
> con $\text{ord}(x) = 2$, $\text{ord}(y) = 3$, $\text{ord}(xy) = 2$ o 6.
>
> Con eso y un poco de trabajo, los grupos de orden 6 son isomorfos a
>
> $$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \quad \text{o} \quad S_3$$

> En otra ayudantía, probamos que los grupos de orden 4 son de la forma

$$\{e, x, y, xy\}$$

con $\mathrm{ord}(x) = 2$ y $\mathrm{ord}(y) = 2$ o 4.

Con eso y un poco de trabajo, los grupos de orden 4 son isomorfos a

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \quad \text{o} \quad V_4 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ \ (\text{Grupo de Klein})$$

1.1. Pruebe que grupos de orden 6 no son simples. Concluya que S_3 tiene algún subgrupo normal no trivial.

Ejercicio 2. Producto directo de grupos.

2.1. Sean G y H dos grupos. Probar que $G \times H$ es un grupo con $\cdot : (G \times H) \times (G \times H) \to (G \times H)$ definido por

$$(g, h) \cdot (g, h') = (gg', hh')$$

2.2. Probar que $|G \times H|$ = $|G||H|$.

2.3. Probar que

$$G \times H \cong \ H \times G$$

2.4. Probar que $G \times \{e_H\}$ y $\{e_G\} \times H$ son normales en $G \times H$.

2.5. Pruebe que $G \times H$ no es simple si $|G|$ y $|H|$ tienen más de un elemento.

2.6. Pruebe que los grupos de orden 4 no son simples.

2.7. Sean G_1, G_2 tales que $G \cong \ G_1 \times G_2$ entonces

$$G \times H \cong \ G_1 \times G_2 \times H$$

Ejercicio 3.

Teorema chino del resto:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \ \mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_r^{\alpha_r}\mathbb{Z}$$

con $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ la descomposición en factores primos de n.

En particular, f definido por

$$f([x]_n) = ([x]_{p_1^{\alpha_1}}, \ldots, [x]_{p_r^{\alpha_r}})$$

es un isomorfismo.

IMPORTANTE:

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \ncong \ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

uno es ciclico y el otro no.

Si aplicamos el teorema chino del resto a $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, queda

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \ \mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z}$$

> Si aplicamos el teorema a $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$, queda
>
> $$\mathbb{Z}/100\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5^2\mathbb{Z}$$

> Teorema de estructura para grupos abelianos finitamente generados:
>
> Para todo grupo **abeliano G finitamente generado**, existen unicos r, s y $1 < d_1 \mid d_2 \mid ... \mid d_s$ tales que
>
> $$G \cong \underbrace{\mathbb{Z}^r}_{\cong G/T(G)} \times \underbrace{\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z}}_{\cong T(G)\ (\text{grupo de torsion})}$$
>
> A los $d_1, ..., d_s$ se llaman factores invariantes.
>
> > Esos G son finitos si y solo si $r = 0$.
> > Esos G son libre (de torsión) si y solo si $s = 0$.

3.1. Sea G un grupo abeliano finito, probar que

$$|G| = d_1 \cdots d_s$$

3.2. Pruebe que

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

3.3 Pruebe que la ecuación:

$$x \equiv a \pmod{n}$$

es equivalente al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{p_1^{\alpha_1}} \\ x \equiv a \pmod{p_2^{\alpha_2}} \\ \quad \vdots \\ x \equiv a \pmod{p_r^{\alpha_r}} \end{cases}$$

donde $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ es la descomposición en factores primos.

3.4. Pruebe que el ultimo digito de 7^7 es 3.