Ayudantía 1

Ejercicio 1. Este ejercicio consiste en probar que D_n esta generado por r y s.

1. Primero, probaremos que $O_2(\mathbb{R})$ esta generado por s y las rotaciones por algún ángulo.

   Definición (Grupo Ortogonal)**.**

$$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid M^t M = I\}$$

   Definición (Rotación por un ángulo)**.** *Definimos la matriz de rotación por un ángulo $\alpha \in \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ como*

$$\mathrm{Rot}(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

   Definición. *La simetría con respecto a una recta sobre el origen:*

$$s := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Probaremos que $O_2(\mathbb{R})$ esta generado por s y $\mathrm{Rot}(\alpha)$ con los $\alpha \in \mathbb{R}$:

   i. Muestre que $A \in O_2(\mathbb{R})$ si y solo si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   con

$$a^2 + b^2 = 1, \quad c^2 + d^2 = 1, \quad ac + bd = 0$$

   ii.
   Proposición. *$x, y \in \mathbb{R}$ es solución de $x^2 + y^2 = 1$ si y solo si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que*

$$x = \cos(\alpha), \quad y = \sin(\alpha)$$

   Use esta proposición y el ítem anterior para probar que $A \in O_2(\mathbb{R})$ si y solo existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

   o

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

   iii. Note que

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \mathrm{Rot}(-\alpha), \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} = s\,\mathrm{Rot}(-\alpha)$$

   Por lo tanto, $A \in O_2(\mathbb{R})$ si y solo existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$A = \mathrm{Rot}(\alpha) \quad \text{o} \quad A = s\,\mathrm{Rot}(\alpha)$$

   Concluyendo que $O_2(\mathbb{R})$ esta generado por s y $\mathrm{Rot}(\alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.

Definición. *Los vértices de un polígono regular de n lados centrado en el origen con uno de los vértices en $(0,1)$ forman el conjunto*

$$P_n = \left\{ \operatorname{Rot}\left(\frac{2\pi}{n}k\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; k = 0, ..., n-1 \right\}$$

Definición (Grupo Diedral)**.** *El grupo D_n es el subgrupo de $O_2(\mathbb{R})$ tal que*

$$M \in D_n \iff \{Mx \mid x \in P_n\} = P_n$$

es decir, son las simetrías que preservan los vértices de un polígono regular de n lados centrado en el origen con uno de los vértices en $(0,1)$.

i.

Definición. *Sea G un grupo, $g \in G$ y H un subgrupo de G, se define*

$$gH := \{gh \mid h \in H\}$$

Pruebe la siguiente proposición:

Proposición. *Sea G un grupo.*

$$gG = G$$

para todo $g \in G$.

ii. Pruebe la siguiente proposición:

Proposición. *Sea G un grupo y H un subgrupo de G,*

$$g_1 g_2 \in H \iff g_2 \in g_1^{-1}H$$

para todo $g_1, g_2 \in G$.

iii. Pruebe que

$$sM \in D_n \iff M \in D_n$$

Hint: use el hecho de que $s \in D_n$ y D_n es grupo.

iv.

Proposición.

$$\operatorname{Rot}(\alpha)\operatorname{Rot}(\beta) = \operatorname{Rot}(\alpha+\beta)$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Pruebe que D_n esta generado por r y s, donde $r = \operatorname{Rot}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

Hint: solo debe encontrar los $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{Rot}(\alpha) \in D_n$. (Justifique esto con todo lo que construimos)

v. Pruebe que D_n tiene $2n$ elementos.

Ejercicio 2.

Definición (Orden). *Sea G un grupo.*

Se define el orden de G como $|G|$, es decir, como la cardinalidad de G. Si G es finito, es la cantidad de elementos.

Se define el orden de un elemento $g \in G$ como

$$\operatorname{ord}(g) := |\langle g \rangle|$$

Encuentre, salvo isomorfismos, todos los grupos de orden 2, 3 y 4 formando todas las posibles tablas de Cayley.

Ejemplo (Tabla de Cayley). *El grupo de Klein se define como $V := \{e, a, b, ab\}$ con la operación descrita por la siguiente tabla de Cayley*

$\cdot$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

Ejercicio 3. Encuentre, salvo isomorfismos, todos los grupos de orden primo.

Hint: Use el corolario del teorema de lagrange sobre el subgrupo generado por un elemento $x \neq e$.

Teorema (Teorema de Lagrange). *Sea G un grupo y H un subgrupo.*

$$|G| = [G : H]|H|$$

Corolario. *Sea G un grupo y H un subgrupo.*

$$|H| \text{ divide a } |G|$$