Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de matemáticas

Ayudantía 12 MAT214

18 de junio 2024

Mateo Hidalgo

1 Recuerdo

Definimos el radical de Jacobson de A como

$$\operatorname{rad}(A)=\bigcap_{\substack{\mathfrak{m}\subseteq A\\ \text{maximal}}}\mathfrak{m},$$

la intersección de todos los ideales maximales de A.
Lema 4.2.43. - Sea A un anillo no nulo. Entonces

$$\operatorname{rad}(A)=\{a\in A\mid 1+\text{ ax es invertible para todo } x\in A\}.$$

Lema 4.2.69 (de la serpiente). - Sea un diagrama conmutativo de A-módulos, donde las filas son sucesiones exactas cortas. Entonces existe una sucesión exacta

$$0\to\ker(\alpha)\to\ker(\beta)\to\ker(\gamma)\xrightarrow{\delta}\operatorname{coker}(\alpha)\to\operatorname{coker}(\beta)\to\operatorname{coker}(\gamma)\to 0,$$

donde δ es llamado el morfismo de conexión.

2 Ejercicios. cf. Certamen 2 2021-1

1. Sea A un anillo noetheriano y sea $I\subseteq A$ un ideal. Probar que si $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}I^n$ entonces x pertenece al ideal $xI:=\{ax,a\in I\}$. Indicación: Por definición, si $I=\langle a_1,\ldots,a_r\rangle$, entonces I^n está generado por [1]

$$\{P(a_1,\ldots,a_r),P\in A[X_1,\ldots,X_r]\text{ polinomio homogéneo de grado } n\}.$$

Notar que si $x\in I^n$ entonces existe $P_n\in A[X_1,\ldots,X_r]$ homogéneo de grado n tal que $x=P_n(a_1,\ldots,a_r)$. Considerar $J_n:=\langle P_1,\ldots,P_n\rangle$ y deducir que para cierto $N\in\mathbf{N}\geqslant 1$ existen $Q_i\in A[X_1,\ldots,X_r]$ tales que $x=Q_1(a_1,\ldots,a_r)x+\ldots+Q_N(a_1,\ldots,a_r)x$.

Solución: El caso $x=0$ es directo, por lo que podemos asumir $x\neq 0$. Dado que A es noetheriano, $I=\langle a_1,\ldots,a_r\rangle$ es finitamente generado. Luego, siguiendo la indicación, el hecho que $x\in I^n$ para todo $n\in\mathbf{N}\geqslant 1$ implica que existe $P_n\in A[X_1,\ldots,X_r]$ homogeneo no-nulo de grado n tal que $x=P_n(a_1,\ldots,a_r)$. En particular, existe una cadena ascendente

$$J_1\subseteq J_2\subseteq J_3\subseteq\cdots\subseteq J_n\subseteq\cdots$$

de ideales de $A[X_1,\ldots,X_r]$, donde $J_n:=\langle P_1,\ldots,P_n\rangle$. El teorema de la base de Hilbert implica que $A[X_1,\ldots,X_r]$ es noetheriano y por ende dicha cadena de ideales debe estabilizarse. En particular, existe

$N \in \mathbf{N} \geqslant 1$ tal que $P_{N+1} \in \langle P_1, \ldots, P_N \rangle$ o equivalentemente, existen polinomios $Q_1, \ldots, Q_N \in A[X_1, \ldots, X_r]$ tales que

$$P_{N+1}(X_1, \ldots, X_r) = Q_1(X_1, \ldots, X_r) P_1(X_1, \ldots, X_r) + \ldots + Q_N(X_1, \ldots, X_r) P_N(X_1, \ldots, X_r),$$

donde cada Q_i es no-constante pues $\operatorname{gr}(P_n) = n$. Evaluando la identidad anterior en $(a_1, \ldots, a_r)$ obtenemos
donde cada Q_i es no-constante pues $\operatorname{gr}(P_n) = n$. Evaluando la identidad anterior en $(a_1, \ldots, a_r)$ obtenemos

$$x = Q_1(a_1, \ldots, a_r) x + \ldots + Q_N(a_1, \ldots, a_r) x.$$

Dado que $Q_i(a_1, \ldots, a_r) \in I$, deducimos que $x \in xI$.

2. Sea A un anillo noetheriano y sea $I \subseteq A$ un ideal. Supongamos que al menos una de las siguientes condiciones se verifica: (b_1) A es un dominio de integridad y $I \neq A$; (b_2) $I \subseteq J(A)$, donde $J(A)$ es el radical de Jacobson de A. Probar, utilizando (a), que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = 0$.

   Solución:

   Sea $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n$. El ítem (a) implica que existe $a \in I$ tal que $x = ax$. Bajo la condición (b_1) tenemos que $a \neq 1$ dado que $I \neq A$ y por ende se deduce que $x = 0$ dado que A es un dominio de integridad. Por otro lado, bajo la condición (b_2) tenemos que $a \in J(A)$ y luego $1 - a$ es un elemento invertible de A (por la caracterización del ideal de Jacobson vista en clases), de donde se deduce nuevamente que $x = 0$.

3. Sea A un anillo no-nulo. El objetivo de este problema es estudiar algunas propiedades de las sucesiones exactas. Para ello, consideremos
$$M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0 \qquad (\star)$$
   una sucesión de A-módulos (no necesariamente exacta). Además, dado un A-módulo N tenemos
$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M_3, N) \xrightarrow{\psi^*} \operatorname{Hom}_A(M_2, N) \xrightarrow{\varphi^*} \operatorname{Hom}_A(M_1, N) \qquad (\star\star)$$
   sucesión de A-módulos inducida por los respectivos pullback.

   (a) Probar que si $(\star\star)$ es exacta para todo A-módulo N, entonces la sucesión $(\star)$ es exacta también. Indicación: Para probar que $\ker(\psi) \subseteq \operatorname{Im}(\varphi)$, considerar $N := M_2/\operatorname{Im}(\varphi)$ y $g : M_2 \to N$ la proyección al cociente. Probar que $g \in \operatorname{Im}(\psi^*)$ y deducir que $\ker(\psi) \subseteq \operatorname{Im}(\varphi)$. La inclusión $\operatorname{Im}(\varphi) \subseteq \ker(\psi)$ así como la igualdad $\operatorname{Im}(\psi) = M_3$ se prueban de manera análoga escogiendo N y $f : M_3 \to N$ convenientes (e.g. identidad o proyección a un cociente).

   Finalmente, consideremos diagrama conmutativo de A-módulos, donde las filas son sucesiones exactas.

   (b) Probar que si dos de los morfismos de A-módulos α, β o γ son isomorfismos, entonces el tercero también.

   Solución: El lema de la serpiente implica que existe una sucesión exacta inducida
$$0 \to \ker(\alpha) \to \ker(\beta) \to \ker(\gamma) \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}(\alpha) \to \operatorname{coker}(\beta) \to \operatorname{coker}(\gamma) \to 0.$$
   Luego, si α y β son isomorfismos entonces son inyectivos (y luego $\ker(\alpha) = 0, \ker(\beta) = 0$) y sobreyectivos (y luego $\operatorname{coker}(\alpha) = 0, \operatorname{coker}(\beta) = 0$). Así, la sucesión exacta ($\dagger$) se reduce a
$$0 \to 0 \to 0 \to \ker(\gamma) \to 0 \to 0 \to \operatorname{coker}(\gamma) \to 0,$$
   y en particular $\ker(\gamma) = 0$ y $\operatorname{coker}(\gamma) = 0$ por exactitud. Así, γ es un isomorfismo. De manera completamente análoga deducimos que si α y γ (resp. β y γ) son isomorfismos, entonces β (resp. α) también.

4. Calcular $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.

Solución: Dado que el producto tensorial está generado por tensores simples de la forma $x \otimes y$, basta analizar $x \otimes y$ para todos $x, y \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Todo $x \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ es la clase de equivalencia de cierto $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$. En particular, $qx = q\left[\frac{p}{q}\right] = [p] = 0$ en $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Luego, $x \otimes y = x \otimes \frac{q}{q}y = qx \otimes \frac{1}{q}y = 0$. Así, dado que $x \otimes y = 0$ para todos $x, y \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, deducimos que $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = 0$.

5. Probemos que para todo $n, m \in \mathbf{N} \geqslant 1$, se tiene que $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$, donde $d = \mathrm{mcd}(n, m)$. Para esto, notar que (la clase de) 1 genera $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ y $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ como $\mathbf{Z}$-módulo, y luego $[1]_n \otimes [1]_m$ genera $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$.

   (a) Probar que el orden de $[1]_n \otimes [1]_m$ en $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$ es a lo más d y deducir que $|(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})| \leqslant d$.

   Solución: Notamos que $n\left([1]_n \otimes [1]_m\right) = [n]_n \otimes [1]_m = 0$ y que $m\left([1]_n \otimes [1]_m\right) = [1]_n \otimes [m]_m = 0$, por $\mathbf{Z}$-bilinealidad. Así, el orden ℓ del generador del grupo abeliano cíclico finito $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ divide n y m, y por ende ℓ divide d. En particular, $\ell \leqslant d$.

   (b) Construir explícitamente una aplicación $\mathbf{Z}$-lineal sobreyectiva $f : (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ y deducir que $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$.

   Solución: Dado que d divide n y m, las aplicaciones Z-lineales

   $$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}, [x]_n \mapsto [x]_d \text{ y } \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}, [y]_m \mapsto [y]_d$$

   están bien definidas y son sobreyectivas. En particular, la aplicación Z-lineal dada por

   $$f : (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}, [x]_n \otimes [y]_m \mapsto [xy]_d$$

   está bien definida y es sobreyectiva. De lo anterior deducimos que $\ell \geqslant d$, y así $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$.

3 Propuestos

Sea P un A-módulo proyectivo. Pruebe que:

1. Para todo morfismo sobreyectivo de A-módulos $\psi : N \to P$ existe una inversa por la derecha $\beta : P \to N$ tal que $\psi \circ \beta = \mathrm{Id}_P$. Indicación: Considere $\mathrm{Id}_P : P \to P$ y use la definición de módulo proyectivo.

2. Deduzca que existe un A-módulo K tal que $P \oplus K$ es un A-módulo libre, i.e., P es un sumando directo de un A-módulo libre L. Indicación: Considere el morfismo sobreyectivo $L := A^{(P)} \to P$.