Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de matemáticas

Ayudantía 11 MAT214

11 de junio 2024

Mateo Hidalgo

1 Recuerdo

Teorema 4.2.37 (Cayley-Hamilton). - Sea M un A-módulo finitamente generado, y sea $u : M \to M$ un endomorfismo. Sean $m_1, \ldots, m_n$ generadores de M y escribamos $u(m_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} m_j$, donde $R = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_{n \times n}(A)$. Sea $P(X) = \det(XI_n - R) \in A[X]$, entonces $P(u) = 0$ en $\mathrm{End}_A(M)$.

Lema 4.2.69 (de la serpiente). - Sea un diagrama conmutativo de A-módulos, donde las filas son sucesiones exactas cortas. Entonces existe una sucesión exacta

$$0 \to \ker(\alpha) \to \ker(\beta) \to \ker(\gamma) \xrightarrow{\delta} \mathrm{coker}(\alpha) \to \mathrm{coker}(\beta) \to \mathrm{coker}(\gamma) \to 0,$$

donde δ es llamado el morfismo de conexión.

2 Cayley-Hamilton

1. Sea A un anillo conmutativo no nulo. Asumamos que hay un mapa inyectivo de A-módulos libres, $A^m \to A^n$. Muestre que $m \leqslant n$.

   Solución:

   Asuma por contradicción que hay un mapa inyectivo $\phi : A^m \to A^n$ con $m > n$. La primera idea es que vemos a A^n como un submódulo de A^m, digamos, el submódulo generado por las primeras n cordenadas. Consideremos entonces el morfismo inyectivo $\iota : A^n \hookrightarrow A^m$, con el cual $\phi' := \iota \circ \phi : A^m \to A^m$ es un endomorfismo inyectivo en un A-módulo finitamente generado.

   Entonces, por el teorema de Cayley-Hamilton, ϕ' satisface una ecuación polinomial

   $$\phi'^k + a_{k-1}\phi'^{k-1} + \cdots + a_1\phi' + a_0 = 0. \tag{1}$$

   Puede haber muchas ecuaciones de esta forma, consideraremos una que tenga grado minimal. Usando la inyectividad de ϕ' es fácil ver que si la ecuación es de grado minimal entonces $a_0 \neq 0$ (podemos factorizar uno de los ϕ').

   Además, tenemos que

   $$\phi'^k + a_{k-1}\phi'^{k-1} + \cdots + a_1\phi' + a_0 = \phi' \circ (\phi'^{k-1} + a_{k-1}\phi'^{k-2} + \cdots + a_1) + a_0 \,\mathrm{Id}\,. \tag{2}$$

   pero la imagen de ϕ' está contenida en A^n, por lo que la última coordenada de cualquier vector en la imagen es 0. De esta forma, aplicando este polinomio en la variable ϕ' a $(0, \ldots, 0, 1) \in A^m$, obtenemos un vector cuya última coordenada es a_0, esto es un absurdo, porque el resultado debería ser siempre 0.

3 Complejos y Sucesiones

1. Lema de los cuatro.

   (a) Suponga que uno tiene el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[d, "\delta"'] \\ A' \arrow[r, "\varphi'"] & B' \arrow[r, "\psi'"] & C' \arrow[r, "\sigma'"] & D' \end{tikzcd}$$

   Si β y δ son inyectivas y α es sobreyectiva, entonces γ es inyectiva.

   (b) Suponga que uno tiene el siguiente diagrama conmutativo de filas exactas:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\delta"'] & E \arrow[d, "\epsilon"'] \\ B' \arrow[r, "\psi'"] & C' \arrow[r, "\sigma'"] & D' \arrow[r, "\tau'"] & E' \end{tikzcd}$$

   Si β y δ son sobreyectivas y ε es inyectiva, entonces γ es sobreyectiva.

   Solución:

   (a) Para mostrar que γ es inyectiva, mostraremos que $\ker\gamma = 0$. Sea $x \in C$ un elemento tal que $\gamma(x) = 0$. Entonces ciertamente la composición $\sigma'(\gamma(x)) = 0$. Sin embargo, por la conmutatividad del diagrama, $\delta(\sigma(x)) = \sigma'(\gamma(x)) = 0$. Sin embargo, δ es inyectiva por lo que debe tenerse que $\sigma(x) = 0$. Por tanto $x \in \ker\sigma = \operatorname{im}\psi$ por exactitud, así que existe un elemento $y \in B$ tal que $\psi(y) = x$. Ahora por conmutatividad del diagrama, vemos que $\psi'(\beta(y)) = \gamma(\psi(y)) = \gamma(x) = 0$. Así que $\beta(y) \in \ker\psi' = \operatorname{im}\varphi'$, por lo que existe un elemento $z \in A'$ tal que $\varphi'(z) = \beta(y)$. Ahora, ya que α es sobreyetica, existe un elemento $a \in A$ tal que $\alpha(a) = z$. Así, por conmutatividad, tenemos que

$$\beta(\varphi(a)) = \varphi'(\alpha(a)) = \varphi'(z) = \beta(y)$$

   Sin embargo, β es inyectiva, por lo que debemos tener $y = \varphi(a)$. Finalmente, vemos que $x = \psi(y) = \psi(\varphi(a)) = 0$ por la exactitud ya que $\psi \circ \varphi = 0$. Así $x = 0$ así que concluimos que $\gamma = 0$ así que γ es efectivamente inyectiva.

   (b) Sea $x \in C'$ un elemento cualquiera. Ya que δ es un mapa sobreyectivo, existe un elemento $y \in D$ tal que $\delta(y) = \sigma'(x)$. Por conmutatividad, $\tau'(\delta(y)) = \varepsilon(\tau(y))$. Ahora, ya que $\delta(y) = \sigma'(x)$ y por exactitud, observamos que $\varepsilon(\tau(y)) = \tau'(\delta(y)) = \tau'(\sigma'(x)) = 0$ dado que $\tau' \circ \sigma' = 0$. Por tanto $\tau(y) \in \ker\varepsilon = 0$ ya que ε es inyectiva. Así, $\tau(y) = 0$ por lo que $y \in \ker\tau = \operatorname{im}\sigma$ por lo que existe un elemento $z \in C$ tal que $\sigma(z) = y$. Entonces, por conmutatividad del diagrama, tenemos que $\sigma'(\gamma(z)) = \delta(\sigma(z)) = \delta(y) = \sigma'(x)$. Ahora, por linealidad, vemos que $\sigma'(x - \gamma(z)) = 0$. Así, $x - \gamma(z) \in \ker\sigma' = \operatorname{Im}(\psi')$, por lo que existe un elemento $w \in B'$ tal que $\psi'(w) = x - \gamma(z)$. Ahora, como β es sobreyectiva, existe un elemento $b \in B$ tal que $\beta(b) = w$. Entonces, por conmutatividad,

$$\gamma(\psi(b)) = \psi'(\beta(b)) = \psi'(w) = x - \gamma(z)$$

   Ahora por linealidad, vemos que $x = \gamma(\psi(b)) + \gamma(z) = \gamma(\psi(b) + z)$. Por tanto $x \in \operatorname{im}\gamma$ así que concluimos que γ es sobreyectiva.

2. Lema de los cinco.

   Suponga que uno tiene el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\delta"'] & E \arrow[d, "\epsilon"'] \\
A' \arrow[r, "\varphi'"] & B' \arrow[r, "\psi'"] & C' \arrow[r, "\sigma'"] & D' \arrow[r, "\tau'"] & E'
\end{tikzcd}
$$

Si β y δ son isomorfismos, α es sobreyectiva, y ε es inyectiva, entonces γ es un isomorfismo.

Solución: Esto sigue fácilmente de ambos resultados del lema de los cuatro ya que uno puede descomponer el diagrama en:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[d, "\delta"'] \\
A' \arrow[r, "\varphi'"] & B' \arrow[r, "\psi'"] & C' \arrow[r, "\sigma'"] & D'
\end{tikzcd}
$$

y

Ahora simplimente usamos ambas partes del lema de los 4 para concluir que γ es tanto inyectiva como sobreyectiva, por tanto un isomorfismo.

3. Lema de los nueve o Lema 3×3.

   Considerar el siguiente diagrama de A-módulos:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L_2 \arrow[r] \arrow[d] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & N_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_1 \arrow[r] \arrow[d] & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & N_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_0 \arrow[r] \arrow[d] & M_0 \arrow[r] \arrow[d] & N_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Asuma que las tres filas son exactas y que las dos columnas de más a la derecha son exactas. Pruebe que la columna izquierda es exacta. Segunda versión: Asuma que las tres filas son exactas y que las dos columnas de más a la izquierda son exactas, pruebe que la columna de la derecha es exacta.

Solución:

El lema de la serpiente nos dice que si tenemos un diagrama conmutativo con filas exactas

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_2 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g_2"] & M_1 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g_1"] & M_0 \arrow[r] \arrow[d, "g_0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_2 \arrow[r, "\alpha'"] & N_1 \arrow[r, "\beta'"] & N_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

entonces hay una sucesión exacta inducida

$$0 \to \ker g_2 \to \ker g_1 \to \ker g_0 \to \operatorname{coker} g_2 \to \operatorname{coker} g_1 \to \operatorname{coker} g_0 \to 0.$$

Si sabemos que cada sucesión $0 \to L_i \xrightarrow{g_i} M_i \xrightarrow{f_i} N_i \to 0$ es exacta, entonces sabemos que $g_i : L_i \to M_i$ mapea L_i isomorficamente a $\ker f_i$, y que $\operatorname{coker} f_i \cong 0$. Por tanto, pensando en L_i como $\ker f_i$, y aplicando el lema de la serpiente a las dos columnas de más a la derecha (como en el diagrama de arriba), tenemos una sucesión exacta

$$0 \to L_2 \to L_1 \to L_0 \to 0 \to 0 \to 0 \to 0,$$

así que la columna izquierda es exacta siempre y cuando los mapas coincidan con los mapas inducidos por el lema de la serpiente. Demostrar que los mapas coinciden se deja como un ejercicio propuesto no trivial.

4. Splitting Lemma

Sea $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta de R-módulos. Los siguientes son equivalentes:

(1) Hay un mapa R-lineal $f' : M \to N$ tal que $f'(f(n)) = n$ para todo $n \in N$.

(2) Hay un mapa R-lineal $g' : P \to M$ tal que $g(g'(p)) = p$ para todo $p \in P$.

(3) La sucesión exacta corta escinde, es decir, hay un isomorfismo $\theta : M \to N \oplus P$ tal que el diagrama siguiente conmuta.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\theta"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & N \oplus P \arrow[r] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Observación: Si reemplazamos los R-módulos por grupos y los mapas R-lineales por morfismos de grupos, las condiciones (1) y (2) no son equivalentes: para una sucesión exacta corta $1 \longrightarrow H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} K \longrightarrow 1$, (1) corresponde a que G sea un producto directo de H y K mientras que (2) corresponde a que G sea un producto semidirecto de H y K (cf. Certamen 1). La razón por la cual (1) y (2) no son equivalentes para grupos se relaciona a la no-conmutatividad. Para una sucesión exacta de grupos abelianos, (1) y (2) son equivalentes (este es el caso especial $R = \mathbf{Z}$, dado que los grupos abelianos no son nada sino $\mathbf{Z}$-módulos).

Solución: Primero mostraremos que (1) y (3) son equivalentes, y luego que (2) y (3) son equivalentes. (1) $\Rightarrow$ (3) : Definamos $\theta : M \to N \oplus P$ por

$$\theta(m) = \left(f'(m), g(m)\right).$$

Dado que f' y g son R-lineales, θ es R-lineal. Para ver que el diagrama del enunciado conmuta, notemos que ir por la parte superior y la derecha del primer cuadrado tiene el efecto $n \mapsto f(n) \mapsto \theta(f(n)) = (f'(f(n)), g(f(n))) = (n, 0)$ e ir por la izquierda y luego por abajo tiene el efecto $n \mapsto n \mapsto (n, 0)$. Ir por el segundo cuadrado tiene el efecto de mandar $m \in M$ a $g(m) \in P$.

Para ver que θ es inyectivo, supongamos que $\theta(m) = (0, 0)$, así $f'(m) = 0$ y $g(m) = 0$. De la exactitud en M, la condición $g(m) = 0$ implica que $m = f(n)$ para algún $n \in N$. Entonces $0 = f'(m) = f'(f(n)) = n$, así que $m = f(n) = f(0) = 0$.

Para mostrar que θ es sobreyectivo, sea $(n, p) \in N \oplus P$. Dado que g es sobreyectivo, $p = g(m)$ para algún $m \in M$, así que $p = g(m) = g(m + f(x))$ para cualquier $x \in N$. Para tener $\theta(m + f(x)) = (n, p)$, buscamos un $x \in N$ tal que

$$n = f'(m + f(x)) = f'(m) + f'(f(x)) = f'(m) + x.$$

Definamos $x := n - f'(m)$. Entonces $m + f(x) = m + f(n) - f\left(f'(m)\right)$ y

$$\begin{aligned}
\theta(m + f(x)) &= \left(f'(m + f(x)), g(m + f(x))\right) \\
&= (n, g(m)) \\
&= (n, p)
\end{aligned}$$

Así θ es un isomorfismo de R-módulos.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Supongamos que hay un isomorfismo de R-módulos $\theta : M \to N \oplus P$ haciendo que el diagrama del enunciado conmute. De la conmutatividad del segundo cuadrado del diagrama del enunciado, $\theta(m) =$

$(*, g(m))$. Definamos la primera coordenada de $\theta(m)$ como $f'(m) : \theta(m) = (f'(m), g(m))$. Entonces $f' : M \to N$. Dado que θ es R-lineal, f' es R-lineal. Por conmutatividad en el primer cuadrado del enunciado, $\theta(f(n)) = (n, 0)$ para $n \in N$, así que $(f'(f(n)), g(f(n))) = (n, 0)$, por lo que $f'(f(n)) = n$ para todo $n \in N$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Para obtener un isomorfismo $M \to N \oplus P$, es más fácil ir en la dirección opuesta. Sea $h : N \oplus P \to M$ dado por

$$h(n, p) = f(n) + g'(p).$$

Esto es R-lineal dado que f y g' son R-lineales. Para mostrar que h es inyectivo, si $h(n,p) = 0$ entonces $f(n) + g'(p) = 0$. Aplicando g a ambos lados, $g(f(n)) + g(g'(p)) = 0$, lo cual se simplifica dando $p = 0$. Entonces $0 = f(n) + g'(0) = f(n)$, así que $n = 0$ dado que f es inyectiva. Para mostrar que h es sobreyectiva, elegimos $m \in M$. Queremos encontrar $n \in N$ y $p \in P$ tales que

$$f(n) + g'(p) = m.$$

Aplicando g a ambos lados, obtenemos

$$g(f(n)) + g\left(g'(p)\right) = g(m) \Rightarrow p = g(m).$$

Definimos $p := g(m)$ y entonces preguntarnos si hay $n \in N$ tal que $f(n) = m - g'(g(m))$. Dado que $\operatorname{im} f = \ker g$, que haya o no tal n es equivalente a verificar que $m - g'(g(m)) \in \ker g$:

$$\begin{aligned} g\left(m - g'(g(m))\right) &= g(m) - g\left(g'(g(m)\right) \\ &= g(m) - g(m) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto $h : N \oplus P \to M$ es un isomorfismo de R-módulos. Sea $\theta = h^{-1}$ el morfismo inverso. Para mostrar que el diagrama del enunciado conmuta, es equivalente a mostrar que el diagrama "dado vuelta"

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & P & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\uparrow & & {\scriptstyle h}\uparrow & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N \oplus P & \longrightarrow & P & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

conmuta $\left(h = \theta^{-1}\right)$. Para $n \in N$, ir a través del primer cuadrado por la izquierda y por arriba tiene el efecto $n \mapsto n \mapsto f(n)$, e ir de la otra forma tiene el efecto $n \mapsto (n, 0) \mapsto h(n, 0) = f(n) + g'(0) = f(n)$. En el segundo cuadrado, para $(n, p) \in N \oplus P$ ir por la izquierda y por arriba tiene el efecto $(n, p) \mapsto g(h(n, p)) = g(f(n)) + g\left(g'(p)\right) = 0 + p = p$, mientras que ir de la otra forma tiene el efecto $(n, p) \mapsto p \mapsto p$.

$(3) \Rightarrow (2)$: Sea $g' : P \to M$ por $g'(p) = \theta^{-1}(0, p)$. Dado que $p \mapsto (0, p)$ y θ^{-1} son R-lineales, g' es R-lineal. Para $p \in P$, la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & P \\ {\scriptstyle \theta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ N \oplus P & \longrightarrow & P \end{array}$$

implica la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & P \\ {\scriptstyle \theta^{-1}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ N \oplus P & \longrightarrow & P \end{array}$$

así que $g\left(g'(p)\right) = g\left(\theta^{-1}(0,p)\right) = p$.

4 Propuestos

1. Terminar la demostración del Lema 3×3 (este es un ejercicio difícil).
2. Mostrar el Splitting Lemma usando el Lema de los cinco.