Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de matemáticas

Ayudantía 10 MAT214

4 de junio 2024

Mateo Hidalgo

1 Estructuras Algebraicas

1. Grupos. Un grupo es un conjunto G con una ley de composición interna con neutro que es asociativa y en que cada elemento tiene un inverso. En caso de que la ley sea conmutativa decimos que el grupo es abeliano.

2. Anillos. Un anillo A es un grupo abeliano cuya l.c.i. llamamos suma y que tiene una segunda l.c.i. llamada producto que es asociativa, tiene un neutro $1 = 1_A$ y que es es compatible con la suma, es decir, $(a + b)c = ab + ac$ y $a(b + c) = ab + ac$.

3. Módulos. Los axiomas de un A-módulo M y un k-espacio vectorial V son los mismos, solo que permitimos que $k = A$ sea un anillo conmutativo arbitrario y no necesariamente un cuerpo.

2 Morfismos

1. Grupos. Un morfismo de grupos es una función entre grupos $f : G \to H$ que es compatible con las l.c.i. de cada grupo, es decir, $f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2)$. Podemos además pedir que f mande el neutro de G al neutro de H pero comprobamos fácilmente que esta condición es redundante.

2. Anillos. Un morfismo de grupos $f : A \to B$ de un anillo A a un anillo B es un morfismo de anillos si $f(ab) = f(a)f(b), \forall a, b \in A$ y $f(1_A) = 1_B$.

3. Módulos. Un morfismo de A-módulos $f : M \to N$ es como una función lineal, es decir, que respeta la estructura de grupo abeliano y que respeta la "acción" de A sobre M y N, es decir, $f(a + b) = f(a) + f(b)$, $f(am) = af(m)$.

3 Subobjetos

1. Si G es un grupo decimos que $H \subset G$ es un subgrupo si es un grupo con la l.c.i. de G restringida a H.

2. Si A es un anillo, decimos que $B \subset A$ es un subanillo si es un anillo con las l.c.i de A restringidas a B. Los anillos tienen también otro tipo de "subobjetos", los ideales. Decimos que $I \subset A$ es un ideal si es un subgrupo normal de A tal que $ab \in I$ para todo $a \in A$ y $b \in I$.

3. Si M es un A-módulo, decimos que $N \subset M$ es un A-submódulo si cumple los axiomas de subespacio vectorial.

4 Generados

1. Dado un grupo abeliano o anillo o módulo A y un subconjunto $S \subset A$ queremos definir el generado por A como el subobjeto más pequeño que contiene a S. Es necesario ver en cada caso que la definición tiene sentido.

2. Diremos que un grupo o anillo o módulo o ideal X es finitamente generado si admite un subconjunto S finito tal que X está generado por S. Si existe un conjunto generador de un solo elemento, entonces X se dice cíclico.

5 Cocientes

1. La noción de cociente es común a grupos abelianos, anillos abelianos y módulos. Si X es cualquiera de estos objetos y Y es un subobjeto (en el caso de anillos, un ideal) de X, X/Y es el conjunto de clases de equivalencia de X bajo la relación $x \sim x'$ ssi $x - x' \in Y$

6 (Sub)Objetos especiales

6.1. Anillos.

1. Si todo elemento no-nulo de A es invertible, entonces decimos que A es un cuerpo.

2. Un dominio es un anillo en que se cumple $ab = 0$ implica $a = 0$ o $b = 0$.

3. Un anillo es un dominio de ideales principales si es un dominio y todo ideal es principal, es decir, es generado por un único elemento.

4. Diremos que un anillo es Noetheriano si se cumple cualquier de las siguientes condiciones equivalentes (cf. Ayudantía 7)

   (a) Una cadena creciente de ideales en A es eventualmente constante.

   (b) Todo conjunto no vacío de ideales de A contiene un ideal que es maximal el sentido de la inclusión.

   (c) Todo ideal de A es finitamente generado.

6.2. Ideales. Los ideales son uno de los objetos más interesantes del curso

1. Primos. Decimos que un ideal $I \subset A$ es primo si $ab \in P$ implica que $a \in P$ o $b \in P$.

2. Maximales. Decimos que un ideal $M \subset A$ es maximal si M es maximal con respecto a la inclusión, es decir, no existe un ideal $I \subset A$ con $M \subsetneq I \subsetneq A$.

   Teorema 1. *Un ideal $I \subset A$ es primo ssi A/P es un dominio y es maximal ssi A/M es un cuerpo.*

3. Radical. Definimos el radical $\sqrt{I}$ de un ideal I como $\sqrt{I} = \{x \in A$ tales que $x^n \in I$ para algún $n \in \mathbb{N}\}$. Decimos que I es radical si $I = \sqrt{I}$. (**No** es correcto (en general) que $\sqrt{I} = \{x^n$ con $x \in I, n \in \mathbb{N}\})$

7 Geometría

Idea: El polinomio $f = x^2 + y^2 - 1 \in k[x, y]$ induce un subconjunto de k^2 dado por $f(x, y) = 0$. El objetivo de esta sección es estudiar subconjuntos de $\mathbb{A}^n = k^n$ dados por ecuaciones polinomiales

1. Vanishing. Sea $S \subset k[X_1, \ldots, X_n]$, definimos el vanishing de S como

$$V(S) = \{x \in \mathbb{A}^n \text{ tal que } f(x) = 0, \forall f \in S\}$$

   La noción de ideal es vital, podemos comprobar que $V(S) = V(I) = V(\sqrt{I})$ donde I es el ideal generado por S.

2. Ideal de X. Dado $X \subset \mathbb{A}^n$ definimos el ideal de X como $\mathcal{I}(X) = \{f \in k[X_1, \dots, X_n]$ tal que $f(x) = 0, \forall x \in X\}$

3. ¿Será que tenemos $V(\mathcal{I}(X)) = X$ y $\mathcal{I}(V(S)) = S$? El Nullstellenzats nos da la respuesta Sea $I \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ un ideal. Entonces,
$$\mathcal{I}(V(I)) = \sqrt{I}$$
En particular, si I es radical, entonces $\mathcal{I}(V(I)) = I$.

4. Los conjuntos de la forma $V(S) \subset \mathbb{A}^n$ reciben distintos nombres: Cerrados de Zariski, Variedades Algebraicas Afines, Conjuntos Algebraicos Afines, etc. Podemos demostrar que los cerrados de Zariski con cerrados en el sentido de MAT225, es decir que son una colección estable bajo intersecciones arbitrarias, uniones finitas y que además $\mathbb{A}^n$ y $\varnothing$ son cerrados de Zariski.

5. Notación 4.1.60 (funciones regulares). - Sea $X \subseteq \mathbb{C}^n$ una variedad algebraica afín. Denotamos por
$$\mathscr{O}(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ función regular }\}$$
a la $\mathbb{C}$-álgebra de funciones regulares de X.

   Proposición 4.1 .61 (functorialidad). - Sean $X \subseteq \mathbb{C}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{C}^m$ dos variedades algebraicas afines. Si $\varphi : X \to Y$ es un morfismo regular, entonces
$$\begin{aligned} \varphi^* : \mathscr{O}(Y) &\to \mathscr{O}(X) \\ f &\mapsto f \circ \varphi \end{aligned}$$
es un morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras. Este morfismo es denominado pullback.

6. Proposición 4.1.62. - Sean $X \subseteq \mathbb{C}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{C}^m$ variedades algebraicas afines. Existe una correspondencia
$$\left\{ \begin{array}{c} \text{morfismos regulares} \\ \varphi : X \to Y \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{morfismos de } \mathbb{C}\text{-álgebras} \\ \mathscr{O}(Y) \to \mathscr{O}(X) \end{array} \right\}$$
$$\varphi \longmapsto \varphi^*$$
En particular, $X \cong Y$ si y sólo si $\mathscr{O}(X) \cong \mathscr{O}(Y)$.

7. Definición 4.1.68 (variedad irreducible). - Sea $X \subseteq \mathbb{C}^n$ una variedad algebraica afín. Decimos que X es irreducible si no puede ser escrita de la forma $X = X_1 \cup X_2$, donde $X_1, X_2 \subseteq X$ son variedades algebraicas afines no vacías y distintas de X. En caso contrario, diremos que X es reducible.

8. Existe una correspondencia entre propiedades topológicas/geométricas de los cerrados de Zariski y propieades algebraicas de sus ideales. Por ejemplo

   Teorema 2. *Sea $X \subseteq \mathbb{C}^n$ una variedad algebraica afín. Entonces, X irreducible $\iff$ $\mathscr{O}(X)$ dominio entero $\iff$ $\mathrm{Im}(X)$ ideal primo.*

8 Complejos y sucesiones exactas

En toda la sección sea A un anillo conmutativo y sean $\{M_i\}$ una colección de A-módulos, se entendrá que todos los morfismos son de A-módulos. A veces tenemos $f : M_1 \to M_2$ y $g : M_2 \to M_3$ morfismos. Anotamos esto como
$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$$

a veces a este tipo de dibujos se le llama "sucesión". Decimos que esta sucesión es exacta en M_2 si $\operatorname{Im}(f) = \ker(g)$. Más generalmente, si tenemos una sucesión

$$\dots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \longrightarrow \dots$$

decimos que es un complejo si $\operatorname{Im}(f_i) \subset \ker(f_{i+1})$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ (y en este caso notamos al dibujo como $M.$) y decimos que es exacta si $\operatorname{Im}(f_i) = \ker(f_{i+1})$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.
Notamos que

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

es exacta si y solo si f es inyectiva, g es sobreyectiva y $\operatorname{Im}(f) = \ker(g)$.
Podemos definir $H_i(M.) = \ker(f_i)/\operatorname{Im}(f_{i-1})$.

9 Ejercicios

1. Sean G, H $\mathbb{Q}$-módulos ¿Es cierto que $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(G, H) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, H)$?

   Solución: En efecto, es claro que todo morfismo de $\mathbb{Q}$-módulos es también un morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos entre los grupos abelianos subyacentes, por lo que basta probar que si $f : G \to H$ es un morfismo de grupos abelianos entonces es un morfismo de $\mathbb{Q}$-módulos. En efecto, sea $x/y \in \mathbb{Q}$ con $x, y \in \mathbb{Z}$ y sea $m \in G$, entonces

   $$y \cdot f\left(\frac{x}{y}m\right) = x \cdot f(m)$$

   por tanto

   $$\left(\frac{1}{y}\right)\left(y \cdot f\left(\frac{x}{y}m\right)\right) = \left(\frac{1}{y}\right)(x \cdot f(m))$$

   así que

   $$1 \cdot f\left(\frac{x}{y}m\right) = \frac{x}{y} \cdot f(m).$$

10 Propuestos

1. La noción de ideal es importante porque nos permite cocientar en anillos apropiadamente. De un ejemplo en que intentar cocientar un anillo A por un subanillo no da como resultado natural un nuevo anillo.